स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

सरस्वती नः सुभगा मयस्करत् ।।

UGMM - 12

रैखिक प्रोग्रामन

प्रथम खण्ड

पाठ्यक्रम के अभिलक्षण

17, महर्षि दयानन्द मार्ग (थार्नहिल रोड), इलाहाबाद - 211 001

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM - 12

रैखिक प्रोग्रामन

खंड

1

पाठ्यक्रम के अभिलक्षण (Features of the Course)

- परामर्शद को (To the Counsellor)
- छात्र को (To the Student)
- संदर्भ पुस्तकें (References)
- प्रतीक और संकेत (Symbols and Notations)

पाठ्यक्रम के अभिलक्षण

प्राय: आपको ऐसी स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ आपको लाभ, हानि, खर्च आदि जैसी राशियों का अधिकतमीकरण (maximization) करना या न्यूनतमीकरण (minimization) करना होता है । आपको या तो अपने लाभ का अधिकतमीकरण करना होता है या अपनी हानि अथवा खर्च का न्यूनतमीकरण करना होता है । एक फैक्टरी का मालिक कम से कम पूंजी निवेश करके अपनी फैक्टरी में वस्तुओं की उत्पादन मात्रा को अधिक से अधिक करना चाहता है । कुछ व्यवरोधों के अधीन वह अपने लाभ को भी अधिक से अधिक करना चाह सकता है । व्यवरोध के रूप में कच्चा माल, मशीन, जनशक्ति, श्रम आदि हो सकता है । अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण की प्रक्रिया को प्राय: इष्टतमीकरण (optimization) कहा जाता है । गणित की भाषा में लाभ, हानि, खर्च आदि राशियों को उद्देश्य फलन माना जा सकता है । गणितीय प्रोग्रामन **कुछ व्यवरोधों के अधीन एक उद्देश्य फलन इष्टतमीकरण करने की गणितीय क्रियाविधियाँ विधियों का एक निकाय होता है ।**

गणितीय प्रोग्रामन उद्देश्य फलन और व्यवरोध रैखिक अथवा अरैखिक हो सकते हैं । उद्देश्य फलन और व्यवरोध की अज्ञात राशियों/चरों को **निर्णय चर** (Decision Variables) कहा जाता है । **जिस प्रोग्रामन के फलन और व्यवरोध रैखिक होते हैं उसे रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) कहा जाता है** । गणितीय प्रोग्रामन विभिन्न प्रकार के होते हैं, जो कि **उद्देश्य फलनों** (Objective Function), **व्यवरोधों** (Constraints) और निर्णय चरों की प्रकृति और लक्षण पर निर्भर करते हैं । इनमें **पूर्णांक प्रोग्रामन** (Integer Programming), **गत्यात्मक प्रोग्रामन** (Dynamic Programming), **प्रसंभाव्य प्रोग्रामन** (Stochastic Programming) और **अरैखिक प्रोग्रामन** (Non-linear Programming) भी शामिल हैं । वर्तमान पाठ्यक्रम में रैखिक प्रोग्रामन और **खेल सिद्धांत** (Game Theory) में इसके अनुप्रयोग के बारे में अध्ययन किया गया है ।

इस तरह, **रैखिक प्रोग्रामन दिए हुए कुछ रैखिक व्यवरोधों, जिनमें रैखिक समिकाएं या असमिकाएं होती हैं, के अधीन रैखिक फलनों का इष्टतमीकरण करने की क्रियाविधियों का एक निकाय होता है** । आप तो यह जानते ही हैं कि अधिकतमीकरण और/या न्यूनतमीकरण की समस्याओं को हल करने में कैलकुलस का प्रयोग किया जा सकता है । पर, केवल कैलकुलस की सहायता से रैखिक प्रोग्रामन की समस्याओं को हल नहीं किया जा सकता । और क्योंकि इन समस्याओं को हल करने के लिए जिन विधियों को लागू किया जाता है उनमें रैखिकता का प्रयोग किया जाता है । इसलिए समस्याओं को हल करने के प्रभावी और प्रत्यक्ष हल प्राप्त हो जाते हैं । इन विधियों का व्यापक प्रयोग, प्रबंध, उत्पादन, व्यापार उद्योग के विभिन्न क्षेत्रों और अनेक अन्य स्थितियों में किया जाता है ।

इन विधियों का उद्गम द्वितीय विश्व युद्ध (1939-1945) के दौरान हुआ था जबकि अपने देश की हवाई और थल रक्षा की रणनीतियाँ विकसित करने के लिए ब्रिटिश सैनिक प्रबंध ने एक दल का निर्माण किया था । उस दल का मुख्य उद्देश्य सीमित सैनिक संसाधनों का प्रभावी ढंग से उपयोग में लाना था । यही संक्रिया विज्ञान (Operations Research) प्रथम औपचारिक कार्यकलाप का प्रारंभ था । इस विज्ञान को संक्रिया विज्ञान इसलिए कहा जाता है क्योंकि इस दल का कार्य 'संक्रियाओं' (Operations) पर अनुसंधान कार्य करना था । रैखिक प्रोग्रामन संक्रिया विज्ञान के अध्ययन का एक अति महत्वपूर्ण क्षेत्र है । इस तरह, ब्रिटेन को ही संक्रिया विज्ञान का अध्ययन शुरू करने और इस तरह रैखिक प्रोग्रामन को एक विषय का स्थान दिलाने का श्रेय जाता है । पर, बाद में चलकर संयुक्त राष्ट्र अमरीका ने इस क्षेत्र में अग्रणी स्थान ले लिया जबकि 1947 में अमरीकी गणितज्ञ जी. दांजिग ने रैखिक प्रोग्रामन की समस्या को हल करने के लिए प्रथम गणितीय विधि विकसित की । इस विधि को **एकधा विधि** (*Simplex*

Method) के नाम से जाना जाता है। इसके बाद तो शैक्षिक संस्थाओं, औद्योगिक और व्यापार संगठनों में कार्यरत कुछ अनुसंधानकर्त्ताओं के प्रयास से अनेक नई विधियाँ विकसित हो गई हैं।

अतः इस पाठ्यक्रम के मुख्य प्रकरण

- रैखिक प्रोग्रामन समस्या को परिभाषित करना और उसके अनुप्रयोग पर चर्चा करना
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए लागू किए जाने वाले चरणों की व्याख्या करना और एकधा विधि को लागू करना
- सरल ढंग से द्वैत सिद्धांत (Duality Theory) को प्रस्तुत करना
- परिवहन समस्याओं और दत्तकार्य समस्याओं जैसी कुछ विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में लागू होने वाली कुछ इष्टतमीकरण विधियों को प्रदर्शित करना
- आव्यूह खेल से संबंधित खेल सिद्धांत का अभिप्रेरित विवरण देना और रैखिक प्रोग्रामन की भूमिका बताना है।

इसके लिए आपको बीजगणित और ज्यामिति की कुछ अनिवार्य संकल्पनाओं की कुछ जानकारी होना आवश्यक है जिन पर यहाँ संदर्भ में बताई गई पुस्तक "Basic Mathematics" में की गई है। फिर भी, इस पाठ्यक्रम को इन संकल्पनाओं की समीक्षा हम पहले खंड में दे रहे हैं।

यह एक 4-क्रेडिट पाठ्यक्रम (4-credit course) है। इसमें 4 खंड हैं और प्रत्येक खंड में 4 इकाइयाँ हैं। इस पाठ्यक्रम को विषय वस्तुओं के खंड/इकाई के अनुसार किए गए वितरण नीचे दिए गए हैं।

पाठ्यक्रम की रूपरेखा (Structure of the Course)

एम टी ई 12 : रैखिक प्रोग्रामन

खंड 1 : आधारभूत गणित और इष्टतमीकरण (Basic Mathematics and Optimization)

- इकाई 1 : आधारभूत बीजगणित (Basic Algebra)
- इकाई 2 : असमिकाएँ और अवमुख समुच्चय (Inequalities and Convex Sets)
- इकाई 3 : दो चरों में इष्टतमीकरण (Optimization in Two Variables)
- इकाई 4 : दो से अधिक चरों में इष्टतमीकरण (Optimization in More than Two Variables)

खंड 2 : एकधा विधि और द्वैत (Simplex Method and Duality)

- इकाई 5 : मानक रूप और हल (Standard Forms and Solutions)
- इकाई 6 : एकदा विधि (Simplex Method)

प्रिय परामर्शद

यह पाठ्यक्रम मुख्यत: उन लोगों के लिए बनाया गया है जिन्हें आधारभूत गणित, रैखिक बीजगणित, और कैलकुलस की कुछ कामचलाऊ जानकारी अवश्य हो। इस पाठ्यक्रम के लिए किसी विशिष्ट पूर्वापेक्षा की आवश्यकता नहीं होती केवल आवश्यकता होती है पूर्व कैलकुलस गणित की जानकारी और सक्षमता तथा कैलकुलस, बीजगणित और ज्यामिति की आधारभूत विधियों के अभिकल्पनात्मक कौशल का होना। अत: यह आवश्यक है कि छात्र हमारे पाठ्यक्रम की एम टी ई-01, एम टी ई-02, एम टी ई-04 और एम टी ई-05 से अच्छी तरह से परिचित हों। उन्हें यह भी सलाह दी जाती है कि इस पाठ्यक्रम में चर्चा की गई पाठ्यक्रम-सामग्री को अच्छी तरह से समझने के लिए वे संदर्भ पुस्तकों की सूची में दी गई पुस्तक "Basic Mathematics" को अवश्य पढ़ लें। इस पाठ्यक्रम में विशेष बल रैखिक प्रोग्रामन विधियों को सीखने पर और फिर इन विधियों को वास्तविक जीवन से जुड़ी उद्योग, प्रबंध, योजना, व्यापार आदि की समस्याओं को हल करने में लागू करने पर दिया गया है।

अध्ययन केन्द्रों पर शिक्षार्थियों को उपलब्ध व्यापक मार्गदर्शन और परामर्श देने के अतिरिक्त हम आपसे यह अपेक्षा करते हैं कि गणित की एक विशेष प्रकृति होने के कारण आप शिक्षार्थियों को कुछ और भी जानकारी दें। युग्म अधिगम पद्धति में परामर्श सुदूर शिक्षण का एक महत्वपूर्ण अंग है। यह तब और अधिक चुनौतीपूर्ण हो जाता है जब हम गणित जैसे विषय विशेष रूप से रैखिक प्रोग्रामन में परामर्श देने के लिए आते हैं। गणित के बारे में लोगों के मन में कुछ मतांधता और भ्रांतियां हैं जिन्हें दूर किया जा सकता है यदि छात्रों के सामने इन्हें सरल और रोचक ढ़ग से प्रस्तुत किया जाए। अत: रैखिक प्रोग्रामन के पारामर्श-सत्र में मुख्य बल समस्याओं को हल करने में आधारभूत संकल्पनाओं और विधियों को स्पष्ट करने और शिक्षार्थियों की कठिनाइयों को दूर करने पर देना होगा। इन्हीं बातों को ध्यान में रखकर ही हमने इस पाठ्यक्रम की समग्री को प्रस्तुत करने का प्रयास किया है और जहाँ कहीं भी आवश्यक समझा गया है उन संकल्पनाओं को फिर से दोहरा लिया गया है जो कि मुख्य पाठ की चर्चा में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इस पाठ्यक्रम की पहली इकाई में मुख्यत: समुच्चयों, फलनों, सदिशों, आव्यूहों आदि की आधारभूत समस्याओं को समीक्षा की गई है।

ये गणित की वे सकल्पनाएँ हैं जिन्हें छपी हुई सामग्री को पढ़कर आसानी से समझा जा सकता है। फिर भी, कुछ ऐसी भी सकल्पनाएँ हैं जिन्हें समझने और समझाने के लिए यह आश्यक है कि शिक्षार्थियों के साथ मिलकर चर्चा की जाए। अत: यह आवश्यक हो जाता है कि रैखिक प्रोग्रामन में ऐसी संकल्पनाओं और स्थितियों को पहचाना जाए और परामर्श-सत्रों में इन पर चर्चा की जाए। जहाँ कहीं भी आवश्यक समझा गया है वहाँ हमने संक्षिप्त ऐतिहासिक विवरण भी दे दिया है। बीच-बीच में ऐतिहासिक विवरण देने का मुख्य कारण एकरसता को दूर करना और सामग्री को पढ़ने में रुचि पैदा करना रहा है।

अंत में, हम चाहेंगे कि विशेष रूप से पाठ्यक्रम की विषय वस्तु, पाठ्यचर्या की अभिकल्पना और पाठ्यक्रम सामग्री प्रस्तुत करने के संबंध में सुधार लाने के संबंध में आप अपनी टिप्पणी और सुझाव अवश्य भेजें। इसके लिए यह आवश्यक हो सकता है कि आप इस संबन्ध में शिक्षार्थियों की प्रतिक्रियाएँ और विचार भी जान लें। आपसे और आपके द्वारा शिक्षार्थियों से प्राप्त पुनर्भरण शिक्षण सामग्री में सुधार करने में काफी सहायक सिद्ध होगा।

और अधिक स्पष्टीकरण और जानकारी के लिए आप निम्न पते पर पत्र लिख सकते हैं –

डॉ. वी. मदन
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068

प्रिय छात्र,

सामान्यत: गणित को संख्याओं (बीजगणित) और आकारों (ज्यामिति) का अध्ययन माना जाता है । पर, गणित के संबंध में की गई यह अभिधारणा पर्याप्त नहीं मानी जा सकती । बीजगणित और ज्यामिति का अध्ययन तो गणितीय उद्यम का केवल एक अंग है । गणित का वास्तविक संबंध तो व्यापक रूप में उसकी अमूर्त प्रकृति का अध्ययन करना है । अभी तक गणित के साथ आपकी अनुभव कैलकुलस, बीजगणित और ज्यामिति जैसे पाठ्यक्रमों के साथ रहा है । इन पाठ्यक्रमों में, आपको सूत्रों और विधियों को याद करना होता है और फिर उन्हें प्रश्नों को हल करने में लागू करना होता है । वर्तमान पाठ्यक्रम की पठन सामग्री ऊपर बताए गए दृष्टिकोण से थोड़ा हटकर है । वास्तव में यहाँ आप उन विधियों से परिचित होंगे जिन्हें वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं को हल करने में गणितज्ञों ने लागू किया था । इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझने के लिए, यह आवश्यक है कि आप निम्नलिखित निर्देशक-रेखाओं को अपनाएँ :

1. खंडों और इकाइयों के प्रत्येक भाग के प्रत्येक पैराग्राफ के प्रत्येक वाक्य के प्रत्येक शब्द को समझने की कोशिश कीजिए । नए विचार प्राय: पिछली ज्ञात संकल्पनाओं पर निर्भर करते हैं । अत: पहले बताई गई संकल्पनाओं को आपने अच्छी तरह से नहीं समझा है तो बाद में प्रस्तुत किए जाने वाले विचारों को समझने में आपको कठिनाई हो सकती है । क्योंकि एक बार के पढ़ने में ही आप हर बात को अच्छी तरह से नहीं समझ सकते हैं, इसलिए यह आवश्यक है कि आप पहले बताए गए विचारों को फिर से दोहरा लें और तब संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझ लें ।

2. पठन-सामग्री का (सामान्यत: गणित का अध्ययन करते समय) अध्ययन करते समय यह आवश्यक है कि आप अपने साथ पेन्सिल (पेन) और कागज रखें । जैसे-जैसे आप पढ़ते जाएं वैसे-वैसे आप परिभाषाओं, संकल्पनाओं, प्रमेयों और मुख्य विचारों को कागज पर लिखते जाएँ । इस तरह लिखकर गणित का अध्ययन करने से एकाग्रता बनी रहेगी । रैखिक प्रोग्रामन की विधियों का अध्ययन करने में थोड़ी अधिक मेहनत करनी होती है - अत: आराम कुर्सी पर आराम से बैठकर और अपने अध्ययन-खंडों को एक उपन्यास, लोकप्रिय फिल्मी पत्रिका या समाचार पत्र की तरह इसे पढ़ना ठीक नहीं हैं ।

3. जहां कहीं भी संभव हो संकल्पनाओं को समझने के लिए चित्र और आरेख बना लीजिए । ऐसा करने से संकल्पनाओं को स्पष्ट रूप से समझने में आपको सहायता मिल सकती है ।

4. विधियों और उदाहरणों के बाद दिए गए प्रश्न इन संकल्पनाओं से संबंधित होते हैं । अत: इन्हें हल करने से पठन-सामग्री पर आपकी पकड़ और मजबूत हो जाएगी । इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तर, संकेत और हल को केवल तभी देखना चाहिए जबकि बार-बार प्रयास करने पर भी आप प्रश्न को हल करने में सफल न हो पाते हों । हल करने के बाद जो उत्तर आपको प्राप्त होते हैं उनका मिलान आप इकाई में दिए गए उत्तर से अवश्य कर लें । पाठ्यांश में भी कुछ छोटे-छोटे प्रश्न दिए गए हैं । यदि आपने चर्चा के दौरान मुख्य अभिधारणाओं को अच्छी तरह से समझ लिया है तो आप इन छोटे-छोटे प्रश्नों के उत्तर आसानी से दे सकते हैं । प्रत्येक खंड में एक समीक्षा दी गई है जिसमें कुछ स्व जांच प्रश्न दिए गए हैं । इसे हल करने से आप स्वंय को तौल सकते हैं कि इस खंड की पठन-सामग्री को आप कितना समझ पाए हैं ।

5. रैखिक प्रोग्रामन की समस्याओं को हल करते समय आप अपने अंदर पूरा वाक्य और पूरा हल लिखने की आदत डालिए । $x + 4y + 5$ जैसे एक अलग-थलग व्यंजक का कोई विशेष अर्थ नहीं निकलता ? इस व्यंजक से आप क्या अर्थ निकालते हैं ? क्या आप x

और y के ऐसे मान ज्ञात करना चाहते हैं जिनसे व्यंजक शून्य से बड़ा हो जाए ? यदि बात यही है, तो इसे आप स्पष्ट शब्दों में क्यों नहीं व्यक्त करते । क्या इसे आप असमिका के एक उदाहरण के रूप में लिखना चाहते हैं, जहाँ $x > 0$, $y > 0$? यदि बात यही है, तो इसे आप स्पष्ट रूप से व्यक्त कीजिए ।

6. प्रत्येक गणितीय संकल्पना को दो अतर्संबंधित विधियों– अंतर्ज्ञानात्मक विधि और औपचारिक विधि–से समझना होता है । गणितीय संकल्पना की अंतर्ज्ञानात्मक पकड़ सामान्यतः केवल तभी मज़बूत होती है जबकि इस संकल्पना से आप कुछ समय तक जूझते रहे हों । अपने अंतर्ज्ञान को बढ़ाने के लिए आप संकल्पना से संबंधित कुछ उदाहरण संग्रह कर सकते हैं । संकल्पना का प्रयोग आप अलग-अलग उदाहरणों में कीजिए और देखिए कि यह अन्य अभिधारणाओं से किस तरह संबंधित है और अस्पष्ट अभिधारणाओं को स्पष्ट करने में यह कहाँ तक सहायक रहा है । औपचारिक विधि से संकल्पना को समझने के लिए यह आवश्यक है कि आप इसकी गणितीय परिभाषा को जानें और अंतर्ज्ञानात्मक अभिधारणा के साथ इसका संबंध स्थापित करें ।

7. कभी-कभी पाठ में दी गई विधि के चरणों को समझने के लिए आपको कुछ अधिक प्रयास करने की आवश्यकता होती है । उसके लिए, बीजगणित और ज्यामिति की अच्छी जानकारी होनी चाहिए, जैसा कि संदर्भ पुस्तकों की सूची में दी गई पुस्तक "Basic Mathematics" में बताया गया है । इसके लिए आप अपने अध्ययन केन्द्र जाइए, उपलब्ध संबंधित पुस्तकों को पढ़िए, अपने परामर्शद या अपने उन सहयोगियों के साथ अपनी समस्या पर चर्चा कीजिए जिन्होंने विधि को अच्छी तरह से समझ लिया है । एक बार विधि को अच्छी तरह से समझ लेने के बाद इस विधि को आप दूसरों को समझाइए जिससे कि आप सुनिश्चित हो सकें कि जो कुछ भी आपने समझा है वह सही है या नहीं और यदि आवश्यक हो, तो इससे संबंधित उदाहरण, प्रश्न, दृष्टांत, टिप्पणी, ऐतिहासिक विवरण आदि इकट्ठा कीजिए और उन सभी बातों का एक नोट बना लीजिए जो कि विधि से संबंधित है । इस तरह, आप स्वतः ही अधिक आसानी से विधि को समझ जाएंगे ।

8. पाठ्यक्रम सामग्री को 4 खंडों और 16 इकाइयों में बांटा गया है । प्रत्येक इकाई को भागों और उपभागों में बांटा गया है । उदाहरण के लिए संख्या 2.3.4 का अर्थ है इकाई 2 के भाग 3 का उपभाग 4, इस तरह, बायीं ओर का पहला अंक इकाई की संख्या को, दूसरा अंक भाग की संख्या को और तीसरा अंक उपभाग की संख्या को प्रकट करता है । पूरी इकाई में सभी परिभाषाओं, गुणधर्मों, प्रमेयों, उदाहरणों, प्रश्नों, चित्रों आदि को क्रम संख्या दी गई हैं और उनके संगत कथनों को मोटे अक्षरों में छापा गया है । परिभाषा, उदाहरण या प्रश्न आदि के भागों को छोटी रोमन संख्याओं (i) (ii), (iii) से या (क), (ख), (ग) आदि से चिह्नित किया गया है ।

संदर्भ पुस्तकें (Reference Books)

हमने प्रत्येक खंड की पाठ्यक्रम सामग्री की पूर्ण रूप में विकसित किया है । हम विश्वास करते हैं कि प्रत्येक इकाई में की गई चर्चा काफी व्यापक रही है । फिर भी, कुछ और जानकारी प्राप्त करने के लिए आप कुछ और पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । इसके लिए हम नीचे पुस्तकों की एक सूची दे रहे हैं जो कि आपके अध्ययन केन्द्र में या आस-पास की संख्या में उपलब्ध हो सकती हैं ।

1 **Basic Mathematics**
Dr. V.D. Madan
Indira Gandhi National Open University
Prof. P. Nath
University of Delhi
Hindustan Publishing Corporation (India)
Delhi; 1992

2. **Linear Algebra**
G. Hadley
Addison-Wesley Publishing Co.

3. **Linear Programming**
S.I. Gass
Macgraw Hill, New York; 1969

4. **Linear Programming — An Introduction Analysis**
N. Paul Loomba
Tata Macgraw Hill Publishing Company Limited
New Delhi; 1987

5. **Linear Programming**
G. Hadley
Addison-Wesley Publishing Co.

6. Mathematical Programming Techniques
N.S. Kambo
Affiliated East-West Press Pvt. Ltd.,New Delhi; 1984

7. Linear Programming and Theory of Games
P.K. Gupta and Manmohan
Sultan Chand & Sons, Delhi

* यह पुस्तक अन्य पाठ्यक्रमों अर्थात् एम टी ई-01, एम टी ई-02, एम टी ई-03, एम टी ई-04, एम टी ई-[illegible], एम टी ई-12, में भी सहायक सिद्ध होगी ।

8

प्रतीक और संकेत

$=$	के बराबर है
$\neq$	के बराबर नहीं है
$>$	से बड़ा है
$<$	से छोटा है
$\nless$	से छोटा नहीं है
$\ngtr$	से बड़ा नहीं है
$\in$	का एक सदस्य है
$\notin$	का सदस्य नहीं है
$\subset$	का उपसमुच्चय है (में आविष्ट है)
$\supset$	महा समुच्चय है (आविष्ट करता है)
$\cup$	सम्मिलित
$\cap$	सर्वनिष्ठ
ϕ	रिक्त समुच्च
$\Rightarrow$	अंतर्निहित है
$\Leftarrow$	से अंतर्निहित
$\leftrightarrow$	यदि और केवल यदि
$\sim$	तुल्यता संबध
$\forall$	सभी के लिए
$\ni$	का अस्तित्व है
$\bullet$	गुणन
$+$	जोड़
$-$	घटाना
min	न्यूनतम
max	अधिकतम
o	संघटन
f'	f का अवकलज
f^{-1}	फलन f का व्युत्क्रम
exp	चरघातांकी
log	लघुगणक
l_n	प्राकृतिक लघुगणक
R^+	धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
R	वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
I	अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
Q	परिमेय संख्याओं का समुच्चय
Z	पूर्णांकों का समुच्चय
N	प्राकृतिक संख्राओं का समुच्चय
F	क्षेत्र
[a, b]	संवृत अंतराल
]a, b[	विवृत अंतराल
]a, b]	अर्ध-विवृत अंतराल (बायीं ओर विवृत) - अर्ध संवृत अंतराल
[a, b[	अर्ध-विवृत अंतराल (दायीं ओर विवृत) - अर्ध संवृत अंतराल
$+\infty$	अनंत
$-\infty$	ऋण अनंत
$\sum$	योगफल
LPP	रेखिक प्रोग्रामन समस्या

ग्रीक वर्णमाला

α	अल्फा
β	बीटा
γ	गामा
δ	डेल्टा
ε	एप्साइलॉन
ζ	जीटा
η	ईटा
θ	थीटा
ι	आयोटा
λ	लेम्डा
μ	म्यू
ν	न्यू
ξ	एक्साई
π	पाइ
Π	बड़ा पाई
ρ	रो
σ	सिग्मा
τ	टाओ
ϕ	फाई
χ	काई
ψ	साई
ω	ओमेगा

खंड

1

आधारभूत गणित और इष्टतमीकरण (Basic Mathematics and Optimization)

पाठ्यक्रम परिकल्पना समिति

प्रो. आर. एन. कोल
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली-110007

प्रो. एन. एस. कैन्बो
गणित विभाग
इंडियन इंस्टिट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
नई दिल्ली-110060

प्रो. एस. सी. गुप्ता
गणित विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर-15

डॉ. वी. डी. मदन
विज्ञान विद्यापीठ
इं. गां. रा. मु. विश्वविद्यालय

डॉ. (मिसिज) देविंद्र भाटिया
गणित विभाग
एस. जी. टी. बी.
खालसा कालिज
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली-110007

डॉ. एच. एल. भाटिया
गणित विभाग
पी. जी. डी. ए. वी. कालिज
दिल्ली विश्वविद्यालय
नेहरू नगर, दिल्ली-110062

डॉ. एच. सी. बक्शी
गणित विभाग
मोतीलाल नेहरू कालिज
बनितो खुरेज मार्ग, नई दिल्ली-110024

खंड उपक्रम दल

प्रो. आर. एन. कोल (संपादक)
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली-110007

डॉ. एस. आर. अरोरा
गणित विभाग
हंसराज कालिज
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली-110007

डॉ. वी. डी. मदन
विज्ञान विद्यापीठ
इं. गां. रा. मु. विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

पाठ्यक्रम संचालक : डॉ. वी. डी. मदन

निर्माण

श्री एम. पी. शर्मा
संयुक्त कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इं. गां. रा. मु. विश्वविद्यालय

अक्तूबर 1993

SBN-81-7263-477-3

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो० आशा एस कँवर निदेशक (मानविकी विद्यापीठ) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
लेजर टाईप सेटर : टेसा मीडिया एंड कम्प्यूटर, 106/7, कृष्णा नगर, सफदर गंज इन्क्लेव, नई दिल्ली-110029
प्रभात ऑफसेट प्रेस, दरिया गंज, नई दिल्ली-2

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से डॉ० ए०के० सिंह, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित, जुलाई, 2012 मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

पूर्वदर्शन (Preview)

यह पाठ्यक्रम का पहला खंड है । इसमें अधिकांशत: ग्राफीय या ज्यामितीय विधियों से प्राप्त किए गए कुछ सरल इष्टतमीकरण समस्याओं के हल दिए गए हैं। इसमें मुख्य प्रयास खंड 2 में चर्चा की जाने वाली बीजीय विधियों को अच्छी तरह से समझने के लिए एक आधार तैयार करना है । इसके लिए कुछ बीजगणित और गणित को अन्य संबंधित संकल्पनाओं की जानकारी आवश्यक है । इस संबंध में संदर्भ पुस्तकों की सूची में बताई गई पुस्तक "Basic Mathematics" काफी सहायक सिद्ध होगी । इसकी आवश्यकता आगे के खंडों और इकाइयों में भी पड़ेगी । इस तरह, पहली दो इकाइयों में हमने इन संकल्पनाओं की समीक्षा की है । बाद की दो इकाइयों में ग्राफीय विधि से इष्टतमीकरण पद्धति पर चर्चा की गई है । खंड की अलग-अलग इकाइयों के विवरण इस प्रकार हैं :

इकाई 1 में हमने आव्यूहों पर संक्षेप में चर्चा की है, जिन्हें हम जानते हैं कि रैखिक समीकरण-निकाय के हल करने में ये काफी उपयोगी होते हैं । विभिन्न प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में ये समान रूप से सहायक होते हैं । एकधा विधि की कलन-विधि (Algorithm) आव्यूहों, सारणिकों, और सदिशों की संकल्पनाओं पर काफी आधारित होती है । अत: यह आवश्यक हो जाता है कि आप इन अभिधारणाओं से अच्छी तरह से परिचित हो जाएं ।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के गणितीय संरक्षण में असमिकाओं की जानकारी होना अति आवश्यक है । और अर्थशास्त्र, रैखिक प्रोग्रामन खेल सिद्धांत आदि में अवमुख समुच्चय सिद्धांत का काफी अनुप्रयोग होता है । पिछले तीन दशकों में अवमुख समुच्चयों के सिद्धांत और इसके अनुप्रयोग के क्षेत्र में काफी कार्य किया गया है । इकाई 2 में हम असमिकाओं और अवमुख समुच्चयों पर चर्चा करेंगे ।

इकाई 3 और 4 में रैखिक प्रोग्रामन के व्यापक अभिलक्षण पर चर्चा की गई है और विशेष ध्यान ग्राफीय विधियों से हल किए गए इष्टतमीकरण की ओर दिया गया है । इकाई 3 में हमने अपनी चर्चा दो चरों तक ही सीमित रखी है और इसे इकाई 4 में दो से अधिक चरों में इष्टतमीकरण पर लागू किया गया है ।

इकाई 1 आधारी बीजगणित (Basic Algebra)

इकाई की रूपरेखा (Structure of the Unit)

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

आप युगपत् रैखिक समीकरण निकाय के बारे में अच्छी तरह से जानते हैं। रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) की समस्या में इसी प्रकार के अनेक चरों वाले समीकरण/असमिकाएँ होती हैं। अतः रैखिक प्रोग्रामन की समस्या का हल प्राप्त करने के लिए हमें इन समीकरणों/असमिकाओं को हल करना होता है। आप दो या तीन चरों वाले युगपत् रैखिक समीकरणों/असमिकाओं को हल करने की कुछ विधियों से अच्छी तरह से परिचित हैं। पर, ये विधियाँ तब सहायक सिद्ध नहीं होती जबकि हमें तीन से अधिक चरों वाले समीकरण-निकाय को हल करना होता है। तब यह आवश्यक हो जाता है कि इस प्रकार के समीकरणों/असमिकाओं को हल करने की कोई अन्य विधि विकसित की जाए। इन विधियों में हम सारणिकों (Determinants) और आव्यूहों (Matrices) का प्रयोग करते हैं। इसके अतिरिक्त हम खण्ड 2 में रैखिक प्रोग्रामन की समस्या को हल करने की एक व्यवस्थित बीजीय विधि विकसित करेंगे। इन विधि के लिए भी सदिशों की आधारभूत जानकारी का होना आवश्यक है। अतः यह अनिवार्य हो जाता है कि आप आव्यूहों, सारणिकों, सदिशों की संकारचनाओं और इनसे संबंधित कुछ गुणधर्मों से अच्छी तरह से परिचित हो जाएँ जिससे कि खंड 2 में बतायी गई बातों को आप पूरी तरह से समझ सकें। इस इकाई में हम इन अभिधारणाओं और इनसे संबंधित कुछ परिणामों को संक्षेप में पुनः दोहराएँगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- आव्यूह और सारणिक को परिभाषित कर सकेंगे
- दो आव्यूहों को जोड़ सकेंगे और उन्हें गुणा कर सकेंगे
- आव्यूह की सारणिक प्राप्त कर सकेंगे
- व्युत्क्रम आव्यूह, यदि इसका अस्तित्व हो, अभिकलित कर सकेंगे
- आव्यूह की जाति ज्ञात कर सकेंगे
- यूक्लिडीय समष्टि, सदिश समष्टि और उसके आधार को परिभाषित कर सकेंगे
- एकघाततः स्वतंत्र और एकघाततः परतंत्र सदिशों में भेद कर सकेंगे।

1.2 आव्यूह और सारणिक (Matrices and Determinants)

अंग्रेज गणितज्ञ आर्थर कैले (1821–1895) ही वह पहला व्यक्ति था जिसने पहले-पहल आव्यूह की अभिधारणा को प्रस्तुत किया था। बाद में चलकर अनेक गणितज्ञों और भौतिकीविदों ने गणित और भौतिकी की अनेक समस्याओं को हल करने में एक साधन के रूप में इन आव्यूहों का प्रयोग किया था। आव्यूहों का प्रयोग अर्थशास्त्र, प्रबंध, इंजीनियरी आदि जैसे अनेक अन्य क्षेत्रों में भी किया जाता है। इस भाग में हम आपको रैखिक समीकरण निकाय (System of Linear Equations) की सहायता से आव्यूहों से परिचित [illegible] आव्यूहों की बीजावली (Algebra of Matrices) पर चर्चा करेंगे, आव्यूह [illegible] परिभाषित करेंगे और व्युत्क्रम आव्यूह और आव्यूह की जाति (Rank of [illegible]) अभिकलित करने की कुछ विधियों से आपको परिचित कराएँगे।

1.2.1 आव्यूह (Matrices)

दो अज्ञात चरों x और y वाले निम्नलिखित दो रैखिक समीकरणों का निकाय [illegible]

$$3x + 5y = 2$$
$$6x + y = 3$$

x और y के गुणांकों को एक आयताकार या सारणी खंडक (array block)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

में रखिए। इस खंडक को संख्याओं 3, 5, 6, 1 की सारणी कहा जाता है। ऊपर वाली क्षैतिज रेखा की **प्रविष्टियों** (Entries) [3, 5] को **प्रथम पंक्ति** (First Row) कहा जाता है। यह पहले समीकरण $3x + 5y = 2$ के x और y के गुणांकों को प्रकट करता है। दूसरी क्षैतिज रेखा की प्रविष्टियों [6, 1] को **दूसरी पंक्ति** (Second Row) कहा जाता है। यह दूसरे समीकरण $6x + y = 3$ के x और y के गुणांकों को प्रकट करता है। पहली ऊर्ध्वाधर रेखा की प्रविष्टियों

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

को **पहला स्तंभ** (First Column) कहा जाता है और $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ प्रविष्टयों को खंडक का **दूसरा स्तंभ** (Second Column) कहा जाता है।

इसी प्रकार, यदि हम समीकरण-निकाय

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 3 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

लें, तो इस समीकरण-निकाय को खंडक या सारणी से निरूपित किया जाता है।

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रत्येक सारणी

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ या } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

को आव्यूह कहा जाता है। आव्यूह को बनाने वाली संख्याओं को प्रविष्टि (entries) या **अवयव** (element) कहा जाता है।

ऊपर के उदाहरणों में हमने अवयव के रूप में वास्तविक संख्याएं ली हैं। अवयव वास्तविक या **सम्मिश्र संख्याएं** (Complex Numbers) हो सकते हैं।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि आव्यूंह को प्रत्येक अवयव के मान और उसकी स्थिति दोनों पर महत्व है।

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

इन आव्यूहों में से प्रत्येक आव्यूह के अवयव 0 और 2 हैं। पर ये आव्यूह अलग-अलग हैं क्योंकि समान स्थितियों में अवयव के मान समान नहीं हैं।

आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

में 2 पंक्तियाँ और 2 स्तंभ हैं। इसके $2 \times 2 = 4$ अवयव हैं।

इसी प्रकार, आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

की 2 पंक्तियाँ और 3 स्तंभ हैं। इसके $2 \times 3 = 6$ अवयव हैं। इन सभी से आव्यूह की निम्नलिखित औपचारिक परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा 1 : आव्यूह (Matrix)

आव्यूह एक विशेष प्रकार का समुच्चय होता है। इसमें m पंक्तियों के, जिनमें से प्रत्येक पंक्ति में n अवयवों का एक क्रमित समुच्चय होता है, रूप में व्यवस्थित mn अवयवों के समुच्चय को $m \times n$ आव्यूह कहा जाता है। इसे m गुणा n आव्यूह पढ़ा जाता है।

$m \times n$ आव्यूह को mn संख्याओं में से प्रत्येक संख्या को आव्यूह का अवयव कहा जाता है। आव्यूह को $m \times n$ की कोटि वाला आव्यूह कहा जाता है जबकि इसमें m पंक्तियाँ और n स्तंभ हैं। इसे $m \times n$ प्रकार का आव्यूह कहा जाता है।

उदाहरण के लिए

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2×3 की कोटि वाला एक आव्यूह है और इसके अवयव 1, -2, 4, 2, 1, 1, हैं।

mn संख्याओं वाली **आयताकार सारणी** (rectangular array) को निम्नलिखित प्रतीक से निरूपित किया जाता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1j} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2j} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3j} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mj} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

संक्षेप में इसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$A = [a_{ij}],\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

इसे $m \times n$ आव्यूह कहा जाता है। प्रतीक a_{ij} उस अवयव को प्रकट करता है, जो iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ में स्थित होता है।

हम विभिन्न प्रकार के आव्यूहों का अध्ययन करेंगे।

परिभाषा 2 : समान आव्यूह (Equal Matrices)

मान लीजिए

$$A = [a_{ij}] \text{ और } B = [b_{ij}]$$

कोई दो आव्यूह हैं । आव्यूहों A और B को समान आव्यूह तब कहा जाता है, जबकि

i) वे समान प्रकार के होते हैं । अर्थात् एक आव्यूह की पंक्तियों की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो और एक आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह के स्तंभों की संख्या के बराबर हों ।

ii) दो आव्यूहों की संगत स्थिति के अवयव समान हों, अर्थात i और j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ ।

उदाहरण के लिए नीचे दिए गए दो आव्यूह समान आव्यूह हैं :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

लेकिन

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ?

अब, आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

लीजिए । इसमें 3 पंक्तियाँ और 3 स्तंभ हैं । इस प्रकार के आव्यूह को वर्ग आव्यूह (square matrix) कहा जाता है ।

परिभाषा 3 : वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

एक $m \times n$ आव्यूह को तब वर्ग आव्यूह कहा जाता है, जब $m = n$ । अर्थात जब पंक्तियों की संख्या और स्तंभों की संख्या बराबर हो । इस प्रकार के आव्यूह को m-वर्ग आव्यूह या n-पंक्ति आव्यूह भी कहा जाता है ।

आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ और } [1, \ . \ 2, \quad 0, \quad 4]$$

लीजिए । इसमें पहला आव्यूह 3 × 1 प्रकार का आव्यूह है और दूसरा 1 × 4 प्रकार का आव्यूह है । पहले आव्यूह को **स्तंभ आव्यूह** (Column Matrix) और दूसरे आव्यूह को **पंक्ति आव्यूह** (Row Matrix) कहा जाता है । इस तरह, केवल एक स्तंभ वाले आव्यूह को स्तंभ आव्यूह और केवल एक पंक्ति वाले आव्यूह को पंक्ति आव्यूह कहा जाता है ।

अब निम्न प्रकार के आव्यूह लीजिए

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ये आव्यूह वर्ग आव्यूह हैं जिनके विकर्णों के अवयवों को छोड़कर अन्य सभी अवयव शून्य हैं इस प्रकार के आव्यूहों को **विकर्ण आव्यूह** (Diagonal Matrix) कहा जाता है ।

इस तरह, वर्ग आव्यूह

$$A = [a_{ij}]$$

को विकर्ण आव्यूह कहा जाता है, जबकि

$$\begin{bmatrix} a_{ij} = 0, \text{ जब } i \neq j \\ a_{ii} = 1, \text{ जब } i = j \end{bmatrix}$$

ऊपर के उदाहरण में दिए गए दूसरे आव्यूह में हम यह देख सकते हैं कि इसके विकर्ण के सभी अवयव एक के बराबर हैं । इस प्रकार के आव्यूह को कोटी 2 वाला एकांक आव्यूह (Unit Matrix) या कोटि 2 वाला तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) कहा जाता है ।

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि वर्ग आव्यूह

$$A = [a_{ij}]$$

को एकांक आव्यूह तब कहा जाता है, जबकि

$$a_{ij} = 1, \text{ जब } i = j$$
$$a_{ij} = 0, \text{ जब } i \neq j$$

यदि आव्यूह A एक ऐसा आव्यूह हो कि इसके सभी अवयव शून्य हों, तब इस आव्यूह को **शून्य आव्यूह** (Zero Matrix या Null Matrix) कहा जाता है ।

उदाहरण के लिए,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [0 \quad 0 \quad 0], \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

क्रमश: कोटि 2 × 2, 1 × 3, 3 × 1 वाले शून्य आव्यूह हैं ।

परिभाषा 3(क) : उपाव्यूह (Submatrix)

यदि हम m × n आव्यूह A को p पंक्तियों और q स्तंभों को छोड़कर अन्य सभी पंक्तियों और स्तंभों को हटा दें, तो इस तरह प्राप्त हुए p × q आव्यूह को A का उपाव्यूह कहा जाता है ।

उदाहरण 1 :

$$\text{आव्यूह } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 7 \\ 8 & 11 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ लेकिन}$$

दिखाइए कि आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ A का एक उपाव्यूह है ।}$$

हल : यदि हम आव्यूह A की दूसरी और तीसरी पंक्तियों और चौथे स्तंभ को हटा दें, तो हमें आव्यूह B प्राप्त हो जाएगा । अत: A को पहली और चौथी पंक्तियों और पहले, दूसरे और तीसरे स्तंभों को छोड़कर अन्य सभी पंक्तियों और स्तंभों को हटा देने पर आव्यूह B प्राप्त होता है । अत: खंडित आव्यूह (Truncated Matrix) B, आव्यूह A का एक उपाव्यूह है ।

प्रश्न 1 : दिखाइए कि आव्यूह $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$ और $D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ उदाहरण 1 में दिए गए आव्यूह A के उपाव्यूह हैं।

1.2.2 आव्यूहों की बीजावली (Algebra of Matrices)

आइए अब हम इस बात को फिर से दोहरा लें कि किस प्रकार एक अदिश राशि से आव्यूह को गुणा किया जाता है, किस प्रकार दो आव्यूहों को जोड़ा जाता है, किस प्रकार एक आव्यूह में से दूसरे आव्यूह को घटाया जाता है, या किस प्रकार दो आव्यूहों को गुणा किया जाता है । आइए पहले हम एक आदिश k से एक आव्यूह को गुणा करने की विधि पर विचार करें ।

परिभाषा 4 : अदिश गुणन (Scalar Multiplication)

मान लीजिए A एक $m \times n$ आव्यूह हैं और k एक अदिश (वास्तविक या सम्मिश्र संख्या) है । तब A के प्रत्येक अवयव को अदिश k से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह kA को A का अदिश गुणज (scalar multiple) कहा जाता है ।

उदाहरण 2 : यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, तो 2A ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times -1 \\ 2 \times 0 & 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2 : यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

तो 5A और (–1) A ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम देखें कि दो आव्यूहों को किस प्रकार जोड़ते हैं।

परिभाषा 5 : आव्यूहों का जोड़ (Addition of Matrices)

मान लीजिए

$$A = [a_{ij}] \text{ और } B = [b_{ij}]$$

समान प्रकार, मान लीजिए $m \times n$, के दो आव्यूह हैं। तब इन दो आव्यूहों का जोड़ $A + B$ निम्नलिखित आव्यूह होता है

$$C = [c_{ij}],$$

जहाँ i और j के सभी मानों के लिए $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

इस तरह, दो $m \times n$ आव्यूहों का जोड़ एक $m \times n$ आव्यूह होता है जिसका प्रत्येक अवयव A और B के संगत अवयवों का जोड़ होता है। ध्यान दीजिए कि आव्यूहों का जोड़ केवल समान आमाप (Size) वाले आव्यूहों के लिए परिभाषित होता है, अर्थात केवल उन आव्यूहों के लिए परिभाषित होता है, जिनकी पंक्तियों की संख्या समान हों और जिनके स्तंभों की संख्या समान हों।

उदाहरण 3 : मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

तब A + B ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा के अनुसार

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+1 \\ 1+0 & -1+2 \\ 0-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ध्यान दीजिए कि आप निम्न प्रकार के दो आव्यूहों A और B को नहीं जोड़ सकते

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? ऐसा होने का कारण यह है कि ये [illegible] हैं।

प्रश्न 3 : यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

तो A + B और A + 5B ज्ञात कीजिए।

परिभाषा 6 : आव्यूहों का अंतर (Difference of Matrices)

मान लीजिए

$A = [a_{ij}]$ और $B = [b_{ij}]$

समान प्रकार के दो आव्यूह हैं। तब, इन को आव्यूहों का अंतर A–B एक आव्यूह

$D = [d_{ij}]$

होता है, जहाँ i और j के सभी मानों के लिए $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

उदाहरण 4 : मान लीजिए आव्यूह A और B निम्नलिखित हैं

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A – B ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-7 & 2-9 & 3-10 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \\ 7-4 & 9-5 & 10-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -7 & -7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4 : यदि आव्यूह A और B वही हों, जो कि उदाहरण 2 में दिए गए हैं, तो A – B, A – 2B ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम दो आव्यूहों के गुणन पर विचार करें।

परिभाषा 7 : आव्यूहों का गुणनफल (Product of Matrices)

मान लीजिए

$A = [a_{ij}], i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$

और

$B = [b_{ij}], j = 1, 2, \ldots, n; k = 1,2, \ldots, p.$

क्रमश: ऐसे दो $m \times n$, और $n \times p$ आव्यूह हैं जिससे कि B की पंक्तियों की संख्या वही होती है जो कि A के स्तंभों की संख्या है। तब इन दो आव्यूहों के गुणनफल को निम्नलिखित $m \times p$, आव्यूह से परिभाषित करते हैं

$C = AB = [c_{ij}], i = 1, 2, \ldots, m; k = 1,2, \ldots, p.$

जहाँ

$$c_{ik} = a_{ij}. b_{ik} + a_{i2}\ b_{2k} + \ldots\ a_{in}\ b_{nk}.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk}$$

= A की iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ के अवयव और B की jवीं पंक्ति और kवें स्तंभ के संगत अवयवों के गुणनफलों का जोड़ ।

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि A की iवी पंक्ति के अवयवों को B के kवें स्तम्भ के संगत अवयवों को गुणा करके और फिर इन गुणनफलों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है।

मान लीजिए A और B निम्नलिखित दो आव्यूह हैं

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A की कोटि 2×3 है और B की कोटि 3×2 है । क्योंकि A के स्तम्भों की संख्या आव्यूह B की संख्या के बराबर हैं, इसलिए हम यह पाते हैं कि AB परिभाषित है और AB की कोटि 2×2 है । अब A की पहली पंक्ति के अवयवों को B के पहले स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करने और फिर गुणनफलों को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होगा

$$c_{11} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 3 - 1 = 2$$

A की पहली पंक्ति के अवयवों को B के दूसरे स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करने और फिर गुणनफलों को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होगा

$$c_{12} = 2 \times (-1) + 3 \times 0 + (-1) \times 2 = -2 - 2 = -4$$

A की दूसरी पंक्ति के अवयवों को B के पहले स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करने और फिर गुणनफलों को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होगा

$$c_{21} = (-1) \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 1 = 1.$$

A की दूसरी पंक्ति के अवयवों को B के दूसरे स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करने और फिर गुणनफलों को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होगा

$$c_{22} = (-1) \times (-1) + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 5.$$

इस तरह,

$$C = AB = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

क्या आप BA ज्ञात कर सकते है ? हाँ , BA ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि B के स्तम्भों को संख्या, जो कि यहाँ 2 है, A की पंक्तियों की संख्या, जो कि यहाँ 2 है, [illegible] है । अतः

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \\ -2 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

ध्यान दीजिए कि BA की कोटि 3×3 हैं, जो कि AB की कोटि के बराबर गुणा करने से भी यह पता चलता है कि $AB \neq BA$.

उदाहरण 5 : मान लीजिए दो आव्यूह A और B हैं

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

क्या आप AB को परिभाषित कर सकते हैं ? गुणनफल, BA के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

हल : यहाँ हम यह देखते हैं कि

A के स्तंभों की संख्या = 3 ≠ B की पंक्तियों की संख्या जो 4 है। अतः AB परिभाषित नहीं हैं।

क्योंकि, B के स्तंभों की संख्या = A की पंक्तियों की संख्या, जो कि 2 है, इसलिए BA परिभाषित होगा और तब

$$BA = \underset{4 \times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}} \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{4 \times 3.}{\begin{bmatrix} 39 & 48 & 75 \\ 47 & 58 & 91 \\ 55 & 68 & 107 \\ 77 & 96 & 153 \end{bmatrix}}$$

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि BA का अस्तित्व तो है, पर AB का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 5 : (क) यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

AB ज्ञात कीजिए। क्या आप BA ज्ञात कर सकते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(ख) यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

यदि संभव हो, तो AC, BC और (A + B) C परिकलित कीजिए। प्रत्येक स्थिति से संबंधित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

परिभाषा 8 : आव्यूह परिवर्त (Transpose of a Matrix)

मान लीजिए

$$A = [a_{ij}]$$

कोटि $m \times n$ वाला एक आव्यूह है। तब कोटि $n \times m$ वाले आव्यूह

$$B = [b_{ji}]$$

को आव्यूह A का परिवर्त कहा जाता है, जबकि i और j के सभी मानों के लिए $b_{ji} = a_{ij}$. B का (j, i) के अवयव, A के (i, j) वें के बराबर होता है।

दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि पंक्तियों के स्थान पर स्तंभ और स्तंभ के स्थान पर पंक्ति लेने पर आव्यूह A का परिवर्त प्राप्त हो जाता है ।

मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

तब इसका परिवर्त निम्नलिखित आव्यूह होता है

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

और इसे A^t से प्रकट करते हैं ।

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

आइए अब हम A^t का भी परिवर्तन लें

$$(A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

जो कि स्वयं आव्यूह A है । इससे यह पता चलता है कि

$$(A^t)^t = A.$$

इसी प्रकार, हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यदि A और B दो आव्यूह हों, तो

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = B^tA^t$ (उत्क्रमण परिवर्त-नियम) ।

उदाहरण 6 : मान लीजिए A और B निम्नलिखित दो आव्यूह हैं

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

दिखाइए कि $(AB)^t = B^tA^t$.

हल : यहाँ

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

यहाँ हम यह पाते हैं कि $(AB)^t = B^tA^t$.

प्रश्न 6 : यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A^t और B^t ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि

$$(AB)^t = B^tA^t.$$

परिभाषा 9 : सममित आव्यूह (Symmetric Matrix)

वर्ग आव्यूह A को **सममित आव्यूह** कहा जाता है जबकि $A = A^t$, अर्थात् सममित आव्यूह एक वर्ग आव्यूह अवश्य होगा और सभी i, j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\text{मान लीजिए } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{14} = a_{41}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{34} = a_{43}$, अर्थात सभी i, j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$.

अत: A एक सममित आव्यूह है ।

आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

सममित आव्यूह नहीं है । आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

परिभाषा के अनुसार वर्ग आव्यूह A सममित होता है यदि और केवल यदि पंक्तियों के स्थान पर स्तंभ को रखने और स्तंभों के स्थान पर पंक्तियों को रखने पर भी यह अपरिवर्तित बना रहता है ।

दूसरे शब्दों में, A सममित होता है, यदि और केवल यदि यह अपने परिवर्त के बराबर हो अथात् $A^t = A$.

परिभाषा 10 : विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix)

वर्ग आव्यूह A को विषम सममित आव्यूह कहा जाता है, यदि सभी i, j के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$.

जब $j = i$, तब हम यह पाते हैं कि $a_{ii} = -a_{ii}$ अर्थात् $2a_{ii} = 0$ अर्थात् $a_{ii} = 0$.

इससे यह पता चलता है कि विषम सममित आव्यूह के सभी विकर्ण अवयव शून्य होना चाहिए ; विषम सममित आव्यूह के लिए $A^t = -A$.

आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

लीजिए। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि A एक विषम सममित आव्यूह है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। ध्यान दीजिए कि आव्यूह A विषम सममित आव्यूह होता है यदि और केवल यदि $A' = -A$.

उदाहरण 7 : बताइए कि निम्नलिखित आव्यूहों में कौन-कौन से आव्यूह सममित हैं और कौन-कौन से असममित हैं?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

हल : आव्यूह A सममित है और आव्यूह B विषम सममित है, क्योंकि $A' = A$, $B' = -B$.

प्रश्न 7 (क) : दिखाइए कि आव्यूह p सममित है, जहाँ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \\ 7 & 5 & 6 & -11 \\ 9 & -8 & -11 & 2 \end{bmatrix}$$

(ख) : बताइए कि आव्यूह A विषम सममित है या नहीं, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

1.2.3 आव्यूहों की सारणिक (Determinants of a Matrices)

व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix) मालुम करने के लिए हमें दिए हुए आव्यूह की सारणिक की अभिधारणा जानने की आवश्यकता होती है जिस पर अब हम यहाँ चर्चा करेंगे। सारणिक का संबंध वर्ग आव्यूह से होता है।

वर्ग आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

लीजिए। A से संबंधित सारणिक की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4.$$

A की सारणिक को det A या | A | से प्रकट किया जाता है।

यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

हो, तो

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ध्यान दीजिए कि जहाँ सारणिक एक संख्या होती है वहाँ आव्यूह संख्याओं का एक **विन्यास** (Arrangement) होता है । आप एक सारणिक का प्रसार तो कर सकते हैं, पर आव्यूह का प्रसार नहीं कर सकते ।

यदि A कोटि 3 × 3 वाला एक वर्ग आव्यूह हो, मान लीजिए आव्यूह यह हो

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

तो

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

det A का मान

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

उदाहरण 8 : सारणिक

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

का मान मालूम कीजिए ।

हल : ऊपर बताए गए नियम के अनुसार

सारणिक का मान = 0 + 32 + 3 – 0 – 10 – 18 = 35 – 28 = 7.

प्रश्न 8 : सारणिक

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

यहाँ आप इस बात की ओर ध्यान दे सकते हैं कि ऊपर बतायी गई विधि से उच्च कोटि के सारणिकों का अर्थात् कोटि 5 × 5 या कोटि 6 × 6 या कोटि n × n जहाँ n वृहत् संख्या हैं, वाले आव्यूह के सारणिकों का मान आसानी से ज्ञात नहीं किया जा सकता । अत: इस कठिनाई को दूर करने के लिए यहाँ हम आपको **उपसारणिक** (Minor) और **सहखंड** (Co-factors) की संकल्पनाओं से परिचित कराएंगे ।

हम इन संकल्पनाओं को समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लेंगे।

सारणिक

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

लीजिए।

मानलीजिए हम अवयव 5 के सापेक्ष वर्ग आव्यूह A का उपसारणिक ज्ञात करना चाहते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि अवयव 5, पहली पंक्ति और पहले स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित है। A को पहली पंक्ति और पहले स्तंभ को हटाने पर हमें उपाव्यूह (Submatrix) की निम्नलिखित सारणिक प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

इस तरह प्राप्त यह आव्यूह, अवयव 5 के सापेक्ष A का उपसारणिक होता है। इसी प्रकार दूसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित अवयव 2 के सापेक्ष आव्यूह A का उपसारणिक यह होता है

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

उदाहरण 9 : ऊपर बताए गए वर्ग आव्यूह A के अवयव 8 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

हल : अवयव 8 तीसरी पंक्ति और पहले स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित है। अत: तीसरी पंक्ति और पहले स्तंभ को हटाने पर हमें परिणामी उपाव्यूह का निम्नलिखित सारणिक प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

अत: अपेक्षित उपसारणिक 4 है।

आइए हम मान लें कि कोटि n वाला एक वर्ग आव्यूह दिया हुआ है। तब अवयव a_{pq} का उपसारणिक, pवीं पंक्ति और qवें स्तंभ को हटाने पर प्राप्त A के उपाव्यूह का सारणिक होता है।

प्रश्न 9 : ऊपर बताए गए आव्यूह A के अवयव a_{21} का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

सहखंड (co-factor) उचित चिह्न युक्त उपसारणिक होते हैं अर्थात् यदि हम (i, j) वें अवयव के उपसारणिक को $(-1)^{i+j}$ से गुणा करें, तो यही उपसारणिक सहखंड हो जाता है। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि आव्यूह A के अवयव 5 का सहखंड $(-1)^{1+1}(-2) = -2$ है, जबकि आव्यूह A के अवयव 2 का सहखंड $(-1)^{1+2}(-11) = 11$ है। आव्यूह A के अवयव 8 का सहखंड यह होगा

$$(-1)^{3+1}(4) = 4.$$

इस तरह, आव्यूह के प्रत्येक अवयव का सहखंड ज्ञात करता है। व्युत्क्रम आव्यूह (inverse of a matrix) के अध्ययन में ये सहखंड काफी उपयोगी सिद्ध होते हैं।

1.2.4 सहखंडज आव्यूह (Adjoint of a Matrix)

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ लीजिए।

इसका सारणिक यह होगा

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

आइए हम प्रत्येक अवयव का सहखंड ज्ञात करें। A के अवयव 5 का सहखंड -2 है, अवयव 2 का सहखंड 7 है, अवयव 1 का सहखंड 3 है, अवयव 3 का सहखंड -5 है, अवयव 0 का सहखंड 7 है, अवयव 2 का सहखंड 11 है, अवयव 8 का सहखंड 4 है, अवयव 1 का सहखंड -7 है और अवयव 3 का सहखंड -6 है।

आइए हम इन सहखंडों को अपनी संगत स्थितियों पर रखकर एक नया आव्यूह प्राप्त करें।

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -5 & 7 & 11 \\ 4 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

इसका परिवर्त अर्थात् B^t ज्ञात कीजिए।

$$B^t = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 7 & 7 & -7 \\ 3 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

तव आव्यूह B^t को सहखंडज आव्यूह A कहा जाता है।

उदाहरण 10 : सत्यापित कीजिए कि आव्यूह

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \text{ का सहखंडज आव्यूह } \begin{vmatrix} 9 & 19 & -4 \\ 4 & 14 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ है।}$$

प्रश्न 10 : (क) निम्नलिखित सारणिकों के मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(ख) यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

तो सहखंडज A ज्ञात कीजिए।

1.2.5 एक आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a Matrix)

ऊपर आपने देखा है कि किस प्रकार सहखंडज आव्यूह ज्ञात किया जाता है । यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ तो इसका सहखंडज } \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ होता है ।}$$

और आव्यूह A का सारणिक यह होता है

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

इसका मान यह है $|A| = 3 - 9 + (-5) = -11$.

वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह $\frac{1}{|A|}$ Adj A है । इसे A^{-1} से प्रकट किया जाता है ।

अर्थात्

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/11 & 4/11 & 5/11 \\ 9/11 & -1/11 & -4/11 \\ 5/11 & -3/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A को A^{-1} से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/11 & 4/11 & 5/11 \\ 9/11 & -1/11 & -4/11 \\ 5/11 & -3/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11/11 & 0 & 0 \\ 0 & 11/11 & 0 \\ 0 & 0 & 11/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

जहाँ I, कोटि 3 वाला एक तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) है । इसी प्रकार आप ज्ञात कर सकते हैं कि $A^{-1}A = I$.

परिभाषा 11 : आव्यूह का व्युत्क्रम

मान लीजिए A, कोटि $n \times n$ वाला एक वर्ग आव्यूह है । यदि B एक ऐसा $n \times n$ आव्यूह हो कि $AB = BA = I$, जहाँ I कोटि n वाला एक एकांक आव्यूह (Unit Matrix) है, तो B को A का व्युत्क्रम आव्यूह कहा जाता है । व्युत्क्रम आव्यूह B को सामान्यतः A^{-1} से प्रकट किया जाता है ।

आपने ऊपर यह देखा है कि

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A).$$

इससे यह पता चलता है कि A^{-1} का अस्तित्व केवल तभी होता है, जबकि $|A| \neq 0$. आव्यूह A को, जबकि $|A| \neq 0$ हो, **व्युत्क्रमणीय आव्यूह** (Non-singular Matrix) कहा जाता है,

अन्यथा इसे **अव्युत्क्रमणीय आव्यूह** (Singular Matrix) कहा जाता है । इस तरह हम यह देखते हैं कि केवल व्युत्क्रमणीय आव्यूह का ही व्युत्क्रम आव्यूह होता है ।

उदाहरण 11 : यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, **तो A^{-1} ज्ञात कीजिए ।**

हल: सहखंडज $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, और

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\text{अत: } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

आप यहाँ यह सत्यापित कर सकते हैं कि

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

प्रश्न 11 : यदि निम्नलिखित आव्यूहों के व्युत्क्रम आव्यूहों का अस्तित्व हो, तो उन्हें ज्ञात कीजिए ।

$$(\text{क}) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\text{ख}) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.2.6 आव्यूह की जाति (Rank of a Matrix)

कोटि $m \times n$ वाले आव्यूह A का उपसारणिक उपाव्यूह B का वह सारणिक होता है जो कि A की k पंक्तियों और k स्तंभों को छोड़कर अन्य सभी पंक्तियों और स्तंभों को हटाने पर प्राप्त होता है ।

आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ लीजिए ।}$$

इस आव्यूह की कोटि 2×3 है । सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

उपसारणिक हैं, जिनमें से प्रत्येक की कोटि 2 है । इन उपसारणिकों के मान क्रमश: $4 - 4 = 0$, $12 - 12 = 0$, $6 - 6 = 0$ हैं ।

अब आप कोटि 1 वाले सभी उपसारणिक लीजिए । ये हैं |1|, |2|, |3|, |2|, |4|, |6|.

और इनमें से कोई भी उपसारणिक शून्य नहीं है । आव्यूह A एक ऐसा आव्यूह है जिसका कोटि 2 वाला प्रत्येक उपसारणिक शून्य है और जिसका कोटि 1 वाला कम से कम **उपसारणिक शून्येत्तर** (Non-Zero) है । ऐसी स्थिति में तब हम यह कहते हैं कि आव्यूह A की जाति 1 है।

परिभाषा 12 : आव्यूह की जाति

संख्या r को कोटि $m \times n$ वाले आव्यूह की जाति कहा जाता है, यदि

i) कोटि r वाला कम से कम एक उपसारणिक शून्येतर हो, और

ii) कोटि (r + 1) वाला प्रत्येक उपसारणिक शून्य हो ।

सामान्यत: इसे $\rho(A)$ से प्रकट किया जाता है, जहाँ $\rho(A) = r$.

पिछले उदाहरण में, $\rho(A) = 1$ क्योंकि कोटि 2 वाला प्रत्येक उपसारणिक शून्य हैं और कोटि 1 वाला कम से कम एक उपसारणिक अवश्य है जो शून्येतर है ।

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ लीजिए ।

कोटि 3 वाला इसका उपसारणिक यह है

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

इसका मान 2 (12−12) + 7 (6−6) = 0 है ।

यहाँ कोटि 2 × 2 वाले नौ उपसारणिक हैं । उपसारणिक

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

लीजिए । इसका मान 6 है । कहने का अर्थ है कि इसका मान शून्येतर है । अत: A की जाति 2 है ।

उदाहरण 12 : आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

की जाति ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ $|A| = 0$. पहली पंक्ति और दूसरे स्तंभ को हटाने पर प्राप्त कोटि 3 वाला उपसारणिक यह है

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

इस सारणिक का मान 54 है । अत: A की कोटि 3 है ।

प्रश्न 12: निम्नलिखित आव्यूहों की जाति मालूम कीजिए ।

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3 सदिश

आप सदिश से और सदिशों के जोड़ और गुणन को बीजीय संक्रियाओं से अच्छी तरह से परिचित हैं । इस भाग में हम सदिशों के बारे में फिर से दोहराएंगे । और, हम **सदिश समष्टि** (Vector Space) और **आधार** (Notions) की अभिधारणा के बारे में भी संक्षेप में चर्चा करेंगे। हम आव्यूहों के साथ इनका संबंध स्थापित करेंगे । बाद की इकाइयों में रैखिक प्रोग्रामन के अध्ययन में ये काफी उपयोगी सिद्ध होते हैं ।

1.3.1 सदिश की अभिधारणा

शुद्ध और अनुप्रयुक्त गणित की अनेक शाखाओं में सदिशों का प्रयोग काफी किया जाता है । यांत्रिकी के अध्ययन में सदिशों की आवश्यकता का अनुभव किया गया । जब किसी पिंड पर कोई बल लग रहा होता है तो इस बल के दो गुणधर्म होते हैं, अर्थात् (i) परिमाण और (ii) दिशा । यह सदिश का एक विशेष उदाहरण है- जो एक ऐसी राशि है जिसमें परिमाण और दिशा दोनों हैं । हम सदिश को एक दिष्ट **रेखा**-खंड (Directed Line Segment) से निरूपित करते हैं । द्विविम समष्टि में प्रत्येक सदिश को एक बिन्दु से या मूल बिन्दु (Origin) से इस बिन्दु तक की रेखा से निरूपित किया जा सकता है ।

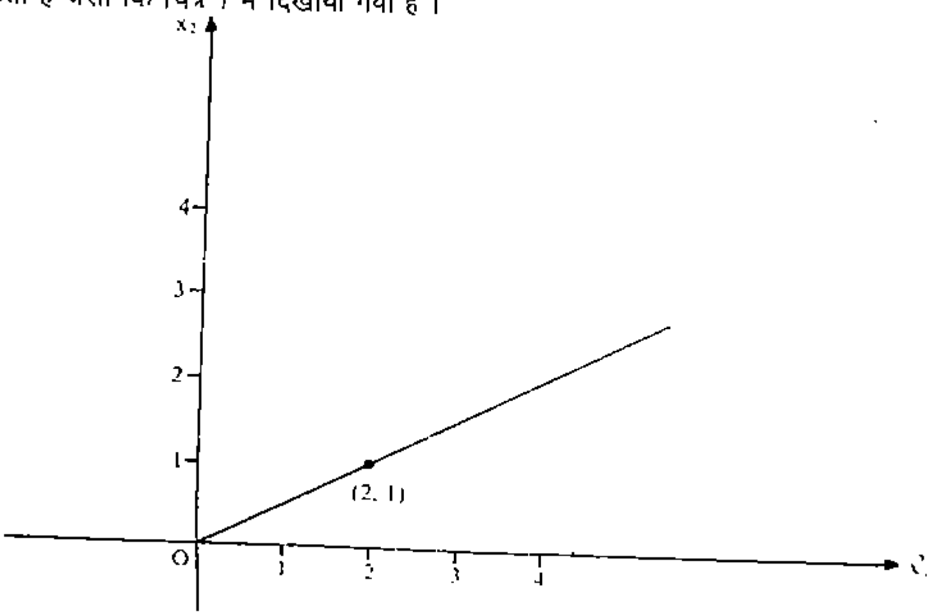
उदाहरण के लिए,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

सदिश हैं । संख्याऐं 2, 1 सदिश a के घटक हैं, जबकि संख्याएं 1,-1 सदिश b के घटक हैं और -3, 2 सदिश c के घटक हैं । इस तरह, घटकों a, b, c में से प्रत्येक सदिश एक दो-घटक सदिश है । इन सदिशों में से प्रत्येक सदिश की कोटि 2×1 वाले एक स्तंभ आव्यूह से निरूपित किया जा सकता है । वास्तव में, इन सदिशों में से प्रत्येक सदिश को कोटि 1×2 वाले एक पंक्ति आव्यूह से भी निरूपित किया जा सकता हैं अर्थात्

$\mathbf{a} = [2, 1]; \quad \mathbf{b} = [1, -1]; \quad \mathbf{c} = [-3, 2]$

ज्यामितीय रूप में, सदिश $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [2, 1]$ को एकदिष्ट रेखा-खंड से निरूपित किया जा सकता है जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया हैं ।



निर्देशक-अक्ष में, बिन्दु (2, 1) सदिश a है। हम यह भी कह सकते हैं कि एक दिए हुए बिन्दु (2, 1) के संगत एक **अद्वितीय सदिश** (Unique Vector) a होता है जिसे मूल बिन्दु से इस बिन्दु तक खींचा जा सकता है। यहाँ इस बात का काफी महत्व है कि बिन्दुओं और सदिशों के बीच संगति होती है।

इस तरह, एक दो-घटक सदिश को (x_1, x_2), $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ या $[x_1, x_2]$ से प्रकट किया जाता है।

इसी प्रकार, 3 घटकों x_1, x_2, x_3 वाले सदिश को $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ या $[x_1, x_2, x_3]$ से प्रकट किया जाता है।

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ के रूप के $n \times 1$ स्तंभ आव्यूह में दिए गए n=घटक सदिश **a** को स्तंभ सदिश या स्तंभ आव्यूह कहा जाता है। इसे $1 \times n$ पंक्ति आव्यूह $(x_1, x_2, ..., x_n)$ से भी निरूपित किया जा सकता है जिसे पंक्ति सदिश कहा जाता है। अतः यह बात अच्छी तरह से समझ लेनी चाहिए कि सदिश **a** को या तो स्तंभ सदिश या पंक्ति सदिश के रूप में लिखा जा सकता है।

1.3.2 सदिश के प्रकार (Kind of Vector)

1. शून्य सदिश (Zero Vector)

उस सदिश को जिसके सभी घटक शून्य के बराबर हो शून्य सदिश (**zero vector, null vector**) कहा जाता है। इसे **0** से प्रकट किया जाता है और इसे मूल बिन्दु माना जाता है।

2. मात्रक सदिश (Unit Vector)

सदिश (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) लीजिए जिसके iवें घटक को छोड़कर, जो कि 1 है, अन्य सभी घटक शून्य हैं। इस प्रकार के सदिश को मात्रक सदिश कहा जाता है और e_i से प्रकट किया जाता है। इस तरह $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

3. योग सदिश (Sum Vector) I

उस सदिश को जिसके प्रत्येक घटक का मान एक हो, **योग सदिश** कहा जाता है और I से प्रकट किया जाता है

$$I = (1, 1, ..., 1)$$

4. समान सदिश (Equal Vectors)

दो सदिशों a और **b** को **समान सदिश** कहा जाता है जबकि उनके संगत घटक समान हों,

अर्थात् $x_i = y_i$, $i = 1, 2, ..., n$

यदि $\mathbf{a} = (0, 2, 1)$ और $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$, तो $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. यदि

$$\mathbf{c} = (0, 1, 1), \text{ तो } \mathbf{a} \neq \mathbf{c}.$$

1.3.3 सदिशों की बीजावली (Algebra of Vectors)

आप जानते हैं कि आव्यूहों को किस प्रकार जोड़ा जाता है, किस प्रकार घटाया जाता है और किस प्रकार गुणा किया जाता है । क्योंकि सदिश भी एक आव्यूह होता है, इसलिए हम सदिशों के जोड़, घटाना और गुणा को भी इसी प्रकार परिभाषित कर सकते हैं ।

I. दो सदिशों का जोड़

समान आमाप वाले दो सदिशों को जोड़ा जा सकता है और इसके लिए एक सदिश के एक घटक को दूसरे सदिश के संगत घटक में जोड़ा जाता है । उदाहरण के लिए, यदि

$\mathbf{a} = (3,4,5)$ और $\mathbf{b} = (4,2,4)$

तो $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3,4,5) + (4,2,4)$

$= (3+4, 4+2, 5+4)$

$= (7,6,9)$

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-1, 2, 1)$

यहाँ आप यह भी देख सकते हैं कि **सदिशों के योग** (Sum of Vectors) और **योग सदिश** (Sum Vectors) में क्या अंतर होता है ।

II. एक अदिश से एक सदिश का गुणन

$\mathbf{a}$ के प्रत्येक घटक को k से गुणा करके आप सदिश $\mathbf{a}$ को सदिश k से गुणा कर सकते हैं । इस तरह, यदि

$$\mathbf{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

एक n- घटक सदिश हो, तो

$$k\mathbf{a} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

उदाहरण के लिए, यदि

$$\mathbf{a} = (3, 4, 5)$$

तो $2\mathbf{a} = (6, 8, 10)$ और $-3\mathbf{a} = (-9, -12, -15)$

सदिशों से सदिशों का गुणन दो प्रकार से किया जाता है । इन्हें प्राय: **अदिश गुणनफल** (Scalar Product) और **सदिश गुणनफल** (Vector Product) कहा जाता है । यहाँ हम अपनी चर्चा केवल अदिश गुणनफल तक ही सीमित रखेंगे ।

III. सदिशों का अदिश गुणनफल

दो n-घटक सदिशों $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$, जहाँ

$$\mathbf{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

का अदिश गुणनफल अदिश

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

होता है और इसे a. b से प्रकट किया जाता है और इसे ' a डाट b' पढ़ा जाता है।

उदाहरण के लिए, यदि

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ और } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

तो $a^tb = (1, -1)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2-1 = -3.$

जहाँ a^t, a का परिवर्त (Transpose) है।

अर्थात $a^tb = (1 \times -2) + (-1) \times 1 = -3.$

V. सदिश a का परिमाण (Magnitude of a Vector)

सदिश a का परिमाण यह होता है

$$|a| = |a.a|^{1/2} = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right|^{1/2}$$

ऊपर के सदिश में आप यह देख सकते हैं कि

$$|a| = [1^2 + (-1)^2]^{1/2} = [1 + 1]^{1/2} = \sqrt{2}$$

इसी प्रकार

$$|b| = \left[(-2)^2 + 1^2\right]^{1/2} = \sqrt{.5}$$

यदि हम $a = [1, -1]$, $b = [-2, 1]$ लें, तो

$a.b = a.b^t = [1, -1], [\ ] = 1 \times -2 + (-1) \times 1 = -3.$

जहाँ b^t, b का परिवर्त है।

VI. दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between two Vectors)

दो सदिशों $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ और $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$,

जहाँ $a, b \neq 0$, के बीच का कोण θ निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|a||b|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}}$$

यदि $\theta = z/2$, तो $\cos\theta = 0$, इसलिए $\mathbf{a^t.b} = 0$. इस तरह दो सदिश **a** और **b** प्रसामान्य लांबिक (Orthonormal) होते हैं, $\mathbf{a^tb} = 0$.

VII. दो सदिशों का सदिश गुणनफन (Vectors Product of two Vectors)

दो सदिशों a और b का सदिश गुणनफन जिसे $a \times b$ के रूप में लिखा जाता है, एक ऐसा सदिश c होता है, जिससे कि

$$a \times b = c = |a|\,|b| \sin\theta.\, n$$

जहाँ θ ($0 < \theta < z$) सदिशों a और b के बीच का कोण है, n एक मात्रक सदिश (Unit Vector) है जो a, b के समतल पर अभिलंब है और n की दिशा ऐसी होती है जिससे कि a, b, n से सदिशों का एक दक्षिण-हस्त त्रमक (Right Handed Triad) प्राप्त होता है।

VIII. दो सदिशों के बीच की दूरी

सदिश (बिन्दु) $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ से सदिश (बिन्दु) $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ के बीच की दूरी, जिसे $|a-b|$ की तरह लिखते हैं, यह होती है

$$|a-b| = \left[(a-b)^t(a-b)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2\right]^{1/2}$$

1.3.4 यूक्लिडीयन समष्टि (Euclidean Space)

आप वास्तविक रेखा के बारे में जानते हैं जिसे प्राय: R से प्रकट किया जाता है। और हम यह भी जानते हैं कि प्रतीक R का प्रयोग वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रकट करने के लिए भी किया जाता है। हम प्राय: वास्तविक संख्याओं को एक रेखा के बिन्दु मान लेते हैं और वास्तविक रेखा के बिन्दुओं को वास्तविक संख्या मान लेते हैं। वास्तविक रेखा R को **एकविम समष्टि** (One-dimensional Space) भी माना जाता है।

आप निर्देशांक समतल (Co-ordinate Plane) से भी अच्छी तरह से परिचित हैं। यह वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों (x, y) (ordered pairs) का समुच्चय होता है और इसे प्राय: $R \times R$ या R^2 से प्रकट किया जाता है। हम R^2 को समतल या एक द्विविम समष्टि के रूप में व्यक्त करते हैं। आप जानते हैं कि R^2 के किन्हीं दो बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के बीच की दूरी d निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाती है

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

आप यह भी जानते हैं कि समुच्चय R^2 के किन्हीं दो अवयवों को जोड़ा जा सकता है और एक अवयव में से दूसरे अवयव को घटाया जा सकता है। R^2 के किसी भी अवयव के एक (अदिश) वास्तविक संख्या से गुणा किया जा सकता है। वस्तुत: R^2 के अवयवों को सदिश माना जा सकता है जिन्हें जोड़ा जा सकता है, एक में से दूसरे को घटाया जा सकता है और जिन्हें एक अदिश से गुणा किया जा सकता है। R^2 में दूरी की अभिधारणा होने से इसका एक विशेष अभिलक्षण हो जाता है और इसी अभिलक्षण के कारण हम R^2 को विमा-2 वाली यूक्लिडीय समष्टि कहते हैं। इसे प्राय: E^2 से प्रकट किया जाता है। इस तरह, यूक्लिडीय समष्टि E^2 सभी सदिश बिन्दुओं $a = (x_1, x_2)$ का समुच्चय होती है। इन सदिशों को जोड़ा जा सकता है और एक अदिश से इनको गुणा किया जा सकता है और एक ऐसी **ऋणेतर संख्या** (Non-negative Number) होती है जिसे किन्हीं दो सदिशों से संबंधित किया जा सकता है, तो इस संख्या को दो सदिशों के बीच की दूरी कहा जाता है। सामान्यत: सभी सदिशों के, जिनमें से प्रत्येक की विमा n है, समुच्चय को अर्थात् $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ को यूक्लिडीय कहा जाता है, इसे E से प्रकट किया जाता है, जिसे जोड़ा जा सकता है,

जिसको एक अदिश से गुणा किया जा सकता है और इस समुच्चय के किन्हीं दो सदिशों से संबंधित एक ऋणेतर संख्या होती है जिसे दो सदिशों के बीच की दूरी कहा जाता है ।

एकघात संचय (Linear Combination)

मानलीजिए E^n के k सदिश $a_1, a_2, ..., a_k$ है । E^n के सदिश b को $a_1, a_2, ..., a_k$ का एकघात संचय कहा जाता है, यदि हम b को इस रूप में लिख सकते हों

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j,$$

जहाँ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ वास्तविक संख्याएं हैं ।

उदाहरण के लिए, यदि E^3 में

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

तो
$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

को $2a_1 + 3a_2$ के रूप में लिखा जा सकता है जो सदिशों a_1 और a_2 का एकघात संचय है ।

यहाँ $b = 2a_1 + 3a_2$ अर्थात् b, a_1 पर एकघाततः परतंत्र हैं । इसे हम $2a_1 + 3a_2 - b = 0$ के रूप में लिखकर यह कह सकते हैं कि a_1, a_2 और b एकघाततः परतंत्र है । एकघात परंतत्रता की इस परिभाषा का व्यापकीकरण निम्न प्रकार से आसानी से किया जा सकता है ।

एकघात परतंत्रता (Linear Dependence)

E^n के सदिश समुच्चय $a_1, a_2, ..., a_n$ को एकघाततः परतंत्र कहा जा सकता है, जबकि ऐसे अदिश $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$, जिनमें सभी शून्य न हों, होते हैं कि

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0$$

यदि λ_i का केवल एक ऐसा समुच्चय, जिस पर यह संबंध लागू होता हो, ऐसा हो कि $\lambda_1 = \lambda_2 = ... \lambda_m = 0$, तो सदिश $a_1, a_2, ..., a_m$ को एकघाततः स्वतंत्र कहा जाता है ।

E^3 के निम्नलिखित तीन सदिश लीजिए

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a_1, a_2, a_3 को एक घात परतंत्रता या एकघात स्वतंत्रता का लक्षण जानने के लिए हमें निम्नलिखित संबंध की जांच करनी होती है

$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0$

या $\begin{bmatrix}\lambda_1\\2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\lambda_1\\\lambda_2\\2\lambda_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\lambda_3\\4\lambda_3\\6\lambda_3\end{bmatrix} = 0$

या $\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$

$2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$

$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$

यहाँ हम यह पाते हैं कि $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ इन समीकरणों को संतुष्ट करता है । अत: ऐसे अदिश λ_i जिनमें सभी शून्य न हों, होते हैं कि $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. इसलिए सदिश a_1, a_2 और a_3 एकघातत: परतंत्र होते हैं । इसके विपरीत E^3 के निम्नलिखित तीन सदिशों का समुच्चय लीजिए

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

यहाँ संबंध $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ से निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

जिससे यह पता चलता है कि $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. अत: सदिश समुच्चय a_1, a_2, a_3 रैखिकत: परतंत्र है । यहाँ इस बात की ओर ध्यान देना आवश्यक है कि यदि सदिश-समुच्चय में एक **शून्य सदिश** (Null Vector) हो, तो यह समुच्चय एकघातत: परतंत्र नहीं हो सकता । ऐसा इसलिए है, क्योंकि यदि समुच्चय $a_1, a_2, ..., a_m, 0$ सदिशों के समुच्चय हो तो

$$0 = 0a_1 + 0a_2 + ... + 0a_m$$

अर्थात $0 = 0a_1 + 0a_2 + ... + 0a_m - i \times 0$

उदाहरण 13 : दिखाइए कि सदिश

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

एकघातत: स्वतंत्र है ।

हल : संबंध $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ से निम्नलिखित तीन समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$

इन समीकरणों का हल $\lambda_1 - \lambda, - \lambda_1, 0$ हैं । अत: सदिश a_1, a_2, a_3 एकघातत: स्वतंत्र हैं ।

प्रश्न 13 : दिखाइए कि E^3 के सदिश

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}$$

एकघातत: परतंत्र हैं ।

जनक समुच्चय (Spanning Set) और आधार (Basis)

E^n के सदिशों $a_1, a_2, ..., a_k$ के संग्रह को E^n का जनक कहा जाता है जबकि E^n के प्रत्येक सदिश को $a_1, a_2, ..., a_k$ के एक एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो।

उदाहरण के लिए, यदि आप E^3 लें और यह मान लें कि

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

E^3 के तीन सदिश हों, तो E^3 के किसी भी सदिश को a_1, a_2, a_3 के एक एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। वास्तव में आप E^3 का कोई भी सदिश ले सकते हैं।

उदाहरण के लिए $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$, या $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$ ले सकते हैं

तब

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} = 3a_1 + 4a_2 + 5a_3$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix} = -2.a_1 + 0.a_2\ 3.a_3$$

इस तरह a_1, a_2, a_3, E^3 के जनक हैं। अब, यदि हम केवल a_1 और a_2 लें, तो E^3 के सदिश $\mathbf{b}$ को a_1 और b_2 को एकघात संचय के रूप में नहीं लिखा जा सकता। अत: a_1 और b_2, E^3 के जनक नहीं होते। सदिश-समुच्चय का एक अतिरिक्त गुणधर्म यह है कि ये एकघातत: स्वतंत्र हैं। अत: सदिश-समुच्चय a_1, a_2, a_3 को E^n का आधार (basis) कहा जाता है। आधार की व्यापक परिभाषा हम इस प्रकार दे सकते हैं

सदिश-समुच्चय $a_1, a_2, ..., a_k$ से E^n का एक आधार प्राप्त होता है, जबकि निम्नलिखित प्रतिबंध लागू होते हों :

1. सदिश $a_1, a_2, ..., a_k$ E^n के जनक हों ;
2. सदिश समुच्चय $a_1, a_2, ..., a_k$ एकघातत: परतंत्र हों।

ऊपर दी गई आधार की परिभाषा में सदिशों की संख्या के बारे में कुछ नहीं कहा गया है। फिर भी यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि E^n के आधार में सदिशों की संख्या n होती है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि मात्रक सदिशों का समुच्चय

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, ..., e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

E^n का एक आधार है और यह दिखाया जा सकता है कि E^n के प्रत्येक आधार में समान संख्या में सदिश होते हैं । यही कारण है कि हम E^n को एक n-विम यूक्लिडीय समष्टि कहा जा सकता है ।

उदाहरण 14 : दिखाइए कि सदिश-समुच्चय

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$$

से E^3 का एक आधार प्राप्त होता है ।

हल : मान लीजिए $b = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, E^3 का एक दिया हुआ सदिश है ।

तब $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ से निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

$b_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2,\ b_2 = 2\lambda_1 + 2\lambda_3,\ b_3 = 2\lambda_2 + 3\lambda_3.$

इनसे $\lambda_1 = \frac{1}{8}(2b_1 + 3b_2 - 2b_3),\ \lambda_2 = \frac{1}{16}(6b_1 - 3b_2 + 2b_3)$

और $\lambda_3 = \frac{1}{8}(2b_3 - 2b_1 + b_2)$

प्राप्त होते हैं ।

इससे यह पता चलता है कि सदिश-समुच्चय a_1, a_2, a_3, E^n के जनक हैं, क्योंकि किसी भी सदिश b को a_1, a_2 और a_3 के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

समुच्चय a_1, a_2, a_3 एकघाततः स्वतंत्र है, क्योंकि

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ अर्थात् $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

अतः सदिशों a_1, a_2, a_3 से E^3 का एक आधार प्राप्त हो जाता है ।

प्रश्न 14 : दिखाइए कि सदिशों

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

से E^3 का एक आधार प्राप्त होता है ।

अब यहाँ हम कुछ परिणाम देंगे जो कि एकधा विधि (Simplex Method) में काफी उपयोगी होते हैं, जिसे आप खंड 2 में पढ़ेंगे ।

1. यदि E^n का आधार मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_k$ दिया हुआ हो, तो किसी भी सदिश b को हम इस आधार के पदों में व्यक्त किया जा सकता है । अर्थात् E^n के किसी भी सदिश को एक और केवल एक विधि से आधार सदिश समुच्चय के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

II. यदि E^n के आधार सदिश-समुच्चय $a_1, a_2, \ldots, a_n'$ दिया हुआ हो और E^n का एक अन्य सदिश $b \neq 0$ दिया हुआ हो, तब, यदि b को a_i के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया गया हो

$$b = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$$

यदि समुच्चय $a_1, a_2, \ldots, a_i$ से

कोई भी सदिश a_i जहाँ $i \neq 0$ हटा लिया गया हो और समुच्चय में b जोड़ दिया गया हो, तो r सदिशों का नया संग्रह भी E^n का एक आधार होता है। यही कारण है कि हम यह कहते हैं कि E^n, एक n-विम यूक्लिडीय समष्टि है।

1.3.5 सदिश समष्टि (Vector Space)

अब हम आपको सदिश समष्टि की संकल्पना से परिचित कराएंगे। सदिश समष्टि सदिशों का एक संग्रह है योग की संक्रिया और एक अदिश से गुणन की संक्रिया के सापेक्ष संवृत होता है। इसका अर्थ यह है कि a और b संग्रह के दो सदिश हों, तो a + b भी एक संग्रह होता है और a, संग्रह में हो, तो λ_a भी संग्रह में होता है, जहाँ λ एक अदिश है।

इसी प्रकार आप योग और अदिश गुणन को परिभाषित करके यह दिखा सकते हैं कि R^3, R पर एक सदिश समष्टि है।

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यदि a एक सदिश समष्टि में हो, तो (–a) भी इस समष्टि में होता है, क्योंकि λ_a संग्रह में है, जहाँ $\lambda = -1$. इसी प्रकार शून्य सदिश 0 सदिश समष्टि में होता है, क्योंकि λ_a संग्रह में हैं, जहाँ $\lambda = 0$. सभी n-घटक सदिशों की संपूर्णता को n-विम सदिश समष्टि कहा जाता है और इसे V_n से प्रकट किया जाता है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि सदिश समष्टि की परिभाषा में दूरी की संकल्पना की आवश्यकता नहीं होती। यदि हम V_n में दूरी परिभाषित करें, तो यह यही होता है जो कि n-विम यूक्लिडीय समष्टि E^n. अतः स्पष्ट है कि E^n एक सदिश समष्टि है, पर इसका विलोम सत्य नहीं होता।

उपसमष्टि

सदिश समष्टि V_n की उपसमष्टि S_n, V_n का एक उपसमुच्चय होती है जो कि स्वंय एक सदिश समष्टि होती है। S_n को विमा में एकघाततः स्वतंत्र सदिशों की अधिकतम संख्या होती है।

उदाहरण 14 : दिखाइए कि सभी सदिशों $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$ का संग्रह S_3, E^3 की एक उपसमष्टि होता है।

हल : मान लीजिए $a_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3^2 \end{bmatrix}$ और $a_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \\ x_3^2 \end{bmatrix}$, S_3 के कोई दो सदिश हैं।

तब $a_1 + a_2 = \begin{bmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ 0 \\ x_3^1 + x_3^2 \end{bmatrix}$ जो कि $\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix}$ के रूप का है।

अत: यह S_3 में है ।

और $\lambda a = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}$ जोकि $\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_2 \end{bmatrix}$ के रूप का है, अत: यह S_3 में है ।

अत: S_3 के सदिशों का संग्रह योग और अदिश गुणन के सापेक्ष संवृत (Closed) होता है और इस तरह यह एक सदिश समष्टि है ।

प्रश्न 15 : दिखाइए कि सभी सदिशों $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$ का संग्रह S_3, E^3 की एक उपसमष्टि है ।

1.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने **आव्यूहों और सारणिकों** की अभिधारणाओं पर संक्षेप में पुन: विचार किया है । हमने **आव्यूहों की बीजावली** अर्थात् आव्यूहों के योग और गुणन की समीक्षा की है । हमने **सहखंडज आव्यूह** और **अव्युत्क्रमणीय/व्युत्क्रमणीय** आव्यूह पर भी चर्चा की है । इसके बाद हमने आपको **व्युत्क्रम आव्यूह** की संकल्पना से परिचित कराया है और इसके लिए हमने सारणिक की अभिधारणा का प्रयोग किया है और साथ ही व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करने की विधि से भी आपको परिचित कराया है ।

इस इकाई में हमने एकघात परतंत्र, स्वतंत्र सदिश, सदिश-जनक और सदिश-समष्टि आधार सहित सदिशों, सदिश बीजावली और सदिश समष्टियों की आधारभूत संकल्पनाओं को फिर से दोहराया है । यूक्लिडीय समष्टि E^n को परिभाषित करके हमने इसके और सदिश समष्टि के भेद को स्पष्ट किया है ।

1.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

प्रश्न 2) $5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & 10 \\ 25 & 0 & 15 \end{bmatrix}$, $(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3) $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 12 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $A + 5B = \begin{bmatrix} 31 & 45 & 52 \\ 28 & 17 & 15 \end{bmatrix}$

प्रश्न 4) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A - 2B \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5) क) $AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ BA का अस्तित्व नहीं है, क्यों ?

ख) $AC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$, $BC = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$, $(A + B)\,C = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

प्रश्न 6) $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $(AB)^t = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = B^tA^t$

प्रश्न 7) क) सममित, क्योंकि $p^t = p$.

ख) A विषम सममित नहीं है ।

प्रश्न 8) $\text{Det} = 3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 3(35 - 18) - 4(7 - 6) + 2(6 - 10)$

$= 3(17) - 4(3) + 2(-4) = 51 - 12 - 8 = 21.$

प्रश्न 9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

प्रश्न 10) (क) (i) 222 (ii) 0

(ख) $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 11) (क) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(ख) यह व्युत्क्रमणीय नहीं है । क्यों ?

प्रश्न 12) (i) $\rho(A) = 2$ (ii) $\rho(A) = 3$.

1.6 शब्दावली

अदिश गुणन	scalar multiplication
अव्युत्क्रमणीय आव्यूह	singular matrix
आधार	basis
आव्यूह की जाति	rank of matrix

आव्यूह परिवर्त	transpose of a matrix
उपसारणिक	minor
उपाव्यूह	submatrix
एकघात संचय	linear combination
एकांक आव्यूह	unit matrix
तत्समक आव्यूह	identity matrix
पंक्ति आव्यूह	row matrix
बीजावली	algebra
मात्रक सदिश	unit vector
यूक्लिडीय समष्टि	euclidean space
रैखिक प्रोग्रामन	linear programming
वर्ग आव्यूह	square matrix
व्युत्क्रमणीय आव्यूह	non-singular matrix
शून्य आव्यूह	null matrix, zero matrix
सदिश समष्टि	vector space
सममित आव्यूह	symmetric matrix
सारणी	array
सहखंड	co-factor
सहखंडज	adjoint
स्तंभ आव्यूह	column matrix

इकाई 2 असमिकाएँ और अवमुख समुच्चय (Inequalities and Convex Sets)

इकाई की रूपरेखा (Sructure of the Unit)

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

रैखिक प्रोग्रामन की समस्या में रैखिक असमिकाओं के रूप में व्यक्त किए गए व्यवरोध होते हैं। अत: रैखिक प्रोग्रामन के अध्ययन के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि आप **रैखिक असमिका-निकाय** (System of Linear Inequalities) विशेष रूप से इनके ग्राफीय हल से अच्छी तरह से परिचित हो जाएं। इस इकाई में हम अपनी चर्चा **असमिकाओं** (Inequalities) के ग्राफीय हल तक ही सीमित रखेंगे। रैखिक असमिका-निकाय के साथ **अवमुख समुच्चय-सिद्धांत** (Theory of Convex Sets) का निकट का संबंध है। इस सिद्धांत के अनुप्रयोग का महत्व न केवल रैखिक प्रोग्रामन में है, बल्कि अर्थशास्त्र और खेल सिद्धांत आदि में भी काफी है। क्योंकि अवमुख समुच्चय-सिद्धांत का अनुप्रयोग अब काफी होने लगा है, इसलिए इस सिद्धांत को विकसित करने के लिए काफी शोध कार्य किए गए हैं और किए जा रहे हैं। इस इकाई में हम असमिकाओं और अवमुख समुच्चयों पर चर्चा करेंगे। इसके लिए **चरम बिन्दु** (Extreme Point), **ऊनविम समतल** (Hyper Plane) और **अर्ध समष्टियों** (Half Spaces) की अभिधारणा को जानना हमारे लिए आवश्यक होता है। इस इकाई में इन अभिधारणाओं को परिभाषित किया जाएगा और कुछ सरल उदाहरण लेकर इन्हें अच्छी तरह से समझने का प्रयास किया जाएगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- असमिकाओं का ग्राफ खींच सकेंगे और उनके हल प्राप्त कर सकेंगे
- अवमुख समुच्चय को परिभाषित कर सकेंगे और उसकी ज्यामितीय व्याख्या कर सकेंगे
- चरम बिन्दु, ऊनविम समतल और अर्ध समष्टि को परिभाषित कर सकेंगे और उनके ग्राफ खींच सकेंगे।

2.2 असमिकाएँ और उनके ग्राफ (Inequalities and their Graphs)

आप एक समतल की रेखाओं और **रेखा-प्रतिच्छेद** (Intersection of Lines) की संकल्पनाओं के बारे में अच्छी तरह से परिचित हैं। आप यह भी जानते हैं कि रेखा का व्यापक समीकरण यह होता है

$$ax + by = c,$$

जहाँ a, b, c वास्तविक अचर हैं।

इसे दो चरों x और y वाला रैखिक समीकरण भी कहा जाता है।

इस समीकरण में $y = 0$ रखने पर हमें $x = c/a$ प्राप्त होता है, जबकि $a \neq 0$. यह x-अक्ष पर रेखा का **अंत:खंड** (Intercept) है। इसी प्रकार $y = 0$ लेने पर हमें

$$y = c/b, \ (b \neq 0)$$

प्राप्त होता है जो कि y-अक्ष पर रेखा का अंत:खंड है।

विन्दुओं

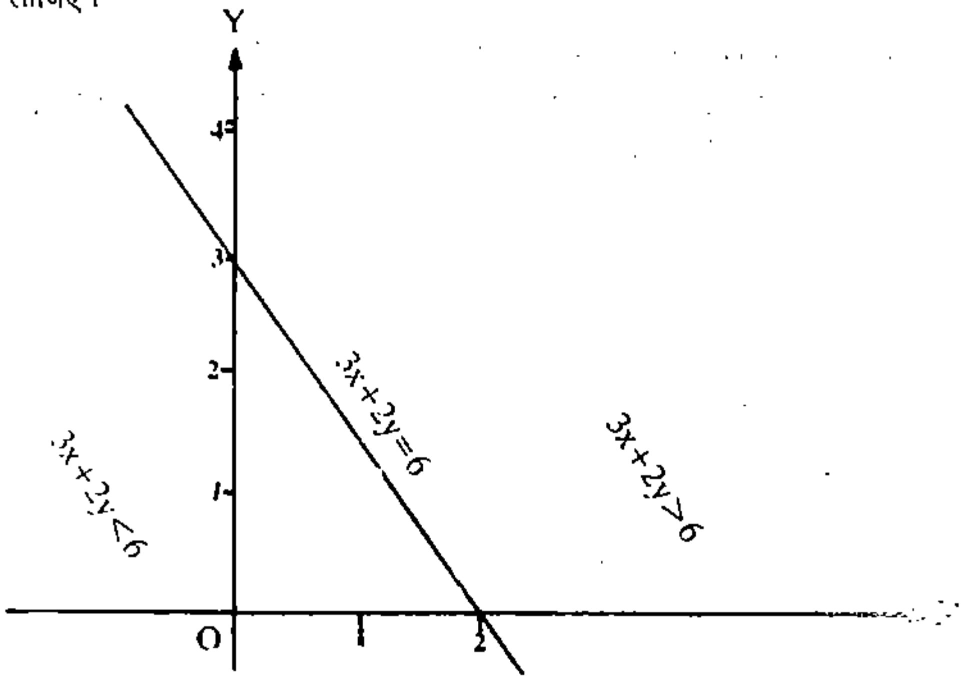
$$\left(\frac{c}{a}, 0\right) \text{ और} \left(0, \frac{c}{b}\right), a \neq 0, b \neq 0$$

को मिलाकर हम ग्राफ पेपर पर इस रेखा को अनुरेखित (Trace) कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, रेखा

$$3x + 2y = 6$$

लीजिए।



चित्र 1

इस रेखा को एक ग्राफ पेपर पर खींचिए जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है।

यह रेखा समतल को तीन समुच्चयों या प्रदेशों में विभाजित कर देता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इन प्रदेशों का विवरण इस प्रकार दिया जा सकता है।

(i) ऐसे विन्दुओं (x, y) का समुच्चय जिससे कि

$$3x + 2y = 6$$

अर्थात वे विन्दु जो रेखा पर स्थित हैं। क्या आप एक ऐसा बिन्दु बना सकते हैं जो ... स्थित है ?

(ii) ऐसे बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय जिससे कि

$$3x + 2y < 6$$

उदाहरण के लिए विन्दु (0, 0) एक ऐसा बिन्दु है जिससे कि

$$3.0 + 2.0 = 0 < 6$$

और विन्दु (1, 1) से इस बात का पता चलता है कि

$$3.1 + 2.1 = 5 < 6$$

बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय को, जहाँ

$$3x + 2y < 6$$

रेखा

$$3x + 2y = 6$$

से परिबद्ध **अर्ध समतल** (Half Plane) कहा जाता है ।

(iii) बिन्दुओं (x,y) के समुच्चय, जिससे कि

$$3x + 2y > 6$$

उदाहरण के लिए, बिन्दु

$$(3,1)\ ,\ (1,2)$$

लीजिए । आप यहाँ यह देख सकते हैं कि

$$3x + 2y = 3\,(3) + 2\,(1) = 9 + 11 > 6$$
$$3.1 - 2.2 = 7 > 6$$

बिन्दु (3, 1), (1, 2) **अर्ध समतल** के सदस्य होते हैं जो कि

$$3x + 2y > 6$$

से निर्धारित होता है ।

ध्यान दीजिए कि असमिका

$$3x + 2y > 6.$$

बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय को निरूपित करती है जो या तो रेखा $3x + 2y = 6$ पर स्थित है या अर्ध समतल

$$3x + 2y < 6$$

के सदस्य होते हैं ।

इसी प्रकार, असमिका

$$3x + 2y \geq 6$$

बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय को निरूपित करती है जो या तो रेखा $3x + 2y = 6$ पर स्थित होते हैं या अर्ध समतल

$$3x + 2y > 6'$$

के सदस्य होते हैं ।

इस इकाई में अध्ययन की जाने वाली अधिकांश असमिकाएँ

$$ax + by \leq c \text{ या } ax + by \geq c$$

के रूप की होगी ।

व्यापक रूप में हम यह कह सकते हैं कि XY-समतल को रेखा

$$ax + by = c.$$

निम्नलिखित तीन प्रदेशों में विभाजित करती हैं ।

(i) ऐसे बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय जिससे कि

$$ax + by = c.$$

जो कि स्वंय विभाजित करने वाली रेखा ही है ;

(ii) ऐसे बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय जिससे कि

$$ax + by < c.$$

अर्थात् विभाजित करने वाली रेखा से परिबद्ध अर्धसमतलों में से एक अर्धसमतल ;

(iii) ऐसे बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय जिससे कि

$$ax + by > c.$$

अर्थात् विभाजित करने वाली रेखा से परिबद्ध दूसरा अर्ध समतल

उदाहरण के रूप में आइए हम असमिका

$$15x + 8y \geq 60$$

का ग्राफ खींचे ।

इसके लिए पहले रेखा

$$15x + 8y = 60$$

लीजिए । यदि y = 0 लें तो x = 4 ; यदि x = 0 लें, तो y = 15/2. अत: बिन्दुओं (4, 0) और (0, 15/2) को मिलाकर हम रेखा खींच सकते हैं । आइए अब हम अर्धसमतल की स्थिति मालुम करें । इसके लिए हम

$$x = 0 \text{ और } y = 0$$

लेते हैं तब

$$15(0) + 9(0) = 0 \leq 60$$

इससे यह पता चलता है कि

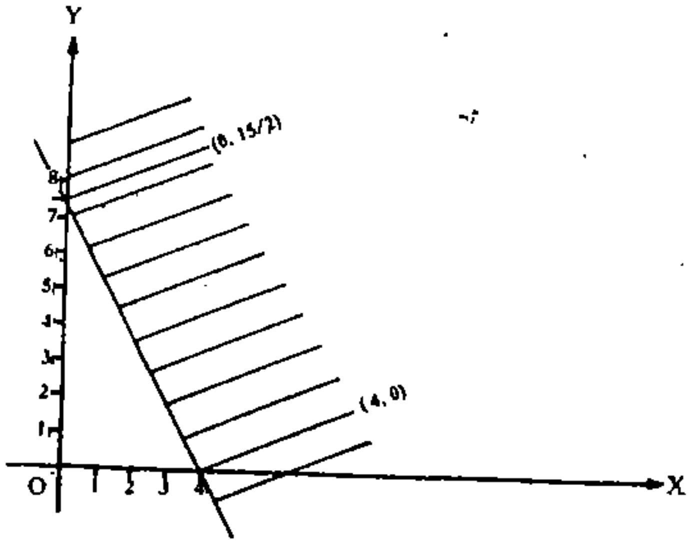
$$15x + 8y \geq 60$$

वह अर्ध समतल है जिसमें मूल बिन्दु स्थित हैं । अत: चित्र 2 में दिखाया गया

$$15x + 8y \geq 60$$

को निरूपित करता है ।

आइए अब हम एक और उदाहरण लें जिसमें एक से अधिक असमिकाएं हों । इन तीन असमिकाओं में से उस असमिका को लें जो सबसे सरल है ।



चित्र 2

उदाहरण 1 : निम्नलिखित तीन असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले विन्दुओं (x, y) के समुच्चय का ग्राफ खींचिए :

$$A = \{(x, y) : 5x + 3y \geq 15\}$$

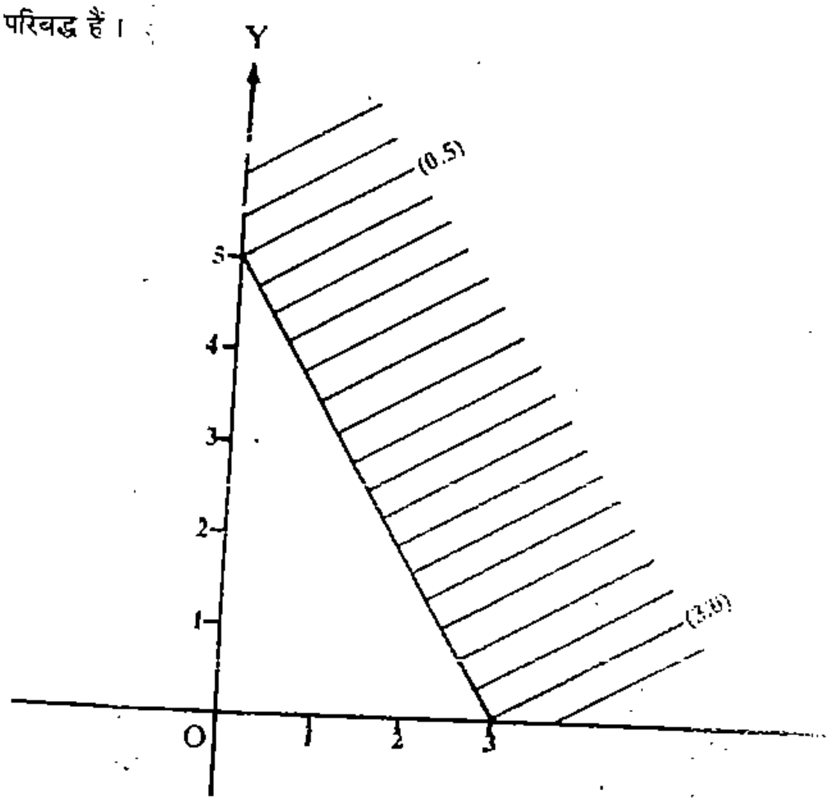
$$B = \{(x, y) : x \geq 0\}$$

और $$C = \{(x, y) : y \geq 0\}$$

हल : क्योंकि इन असमिकाओं को युगपत् रूप से संतुष्ट हो जाना चाहिए, इसलिए अभी समुच्चय तीन समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (intersection) होगा। समुच्चय $A \cap B \cap C$ है जो कि छायादार है और जो रेखा

$$5x + 3y = 15$$

से परिबद्ध हैं।



चित्र 3

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि प्रतिबंध

$$x \geq 0 \text{ और } y \geq 0$$

के कारण छायादार क्षेत्र में केवल वही बिन्दु होते हैं जो प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में स्थित होते हैं।

उदाहरण 2 : उन बिन्दुओं के समुच्चय का ग्राफ खींचिए जो असमिकाओं $x \geq 1$ और $3x + 4y \leq 12$ **को संतुष्ट करते हों।**

हल : आप रेखा $x = 1$ खींच सकते हैं जो कि बिन्दु (1,0) से होकर जाने वाली एक ऊर्ध्वाकार रेखा (Vertical Line) है। रेखा

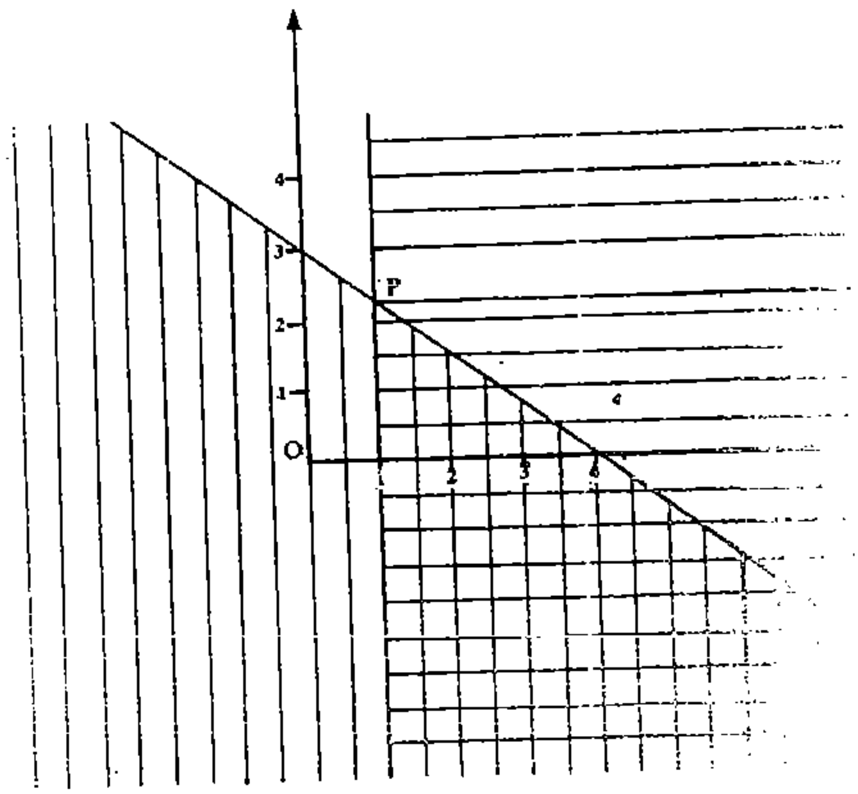
$$3x + 4y = 12$$

विन्दुओं (4, 0) और (0, 3) को मिलाने वाली रेखा है। समुच्चय

$$A = \{(x, y : x \geq 1\}$$

को क्षैतिज रेखाओं से छायादार बनाया गया है और समुच्चय

$$B = \{(x, y : 13x + 4y \leq 12\}$$



चित्र 4

ऊर्ध्वाधर रेखाओं से छायादार बनाया गया समुच्चय है। उन बिन्दुओं का समुच्चय को और असमिकाओं को संतुष्ट करते हैं अर्थात् बिन्दुओं का समुच्चय $A \cap B$ तिरछी रेखाओं को छायादार किया गया क्षेत्र है जैसा कि चित्र 4 में दिखाया गया है।

कोने वाला बिन्दु P, रेखाओं $x = 1$ और $3x + 4y = 12$ का प्रतिच्छेद-बिन्दु है । यह बिन्दु

$$P(1, 9/4)$$

है ।

आइए अब हम एक और उदाहरण लें जिसमें चार असमिकाएँ हैं ।

उदाहरण 3 : उन बिन्दुओं के समुच्चय का ग्राफ खींचिए जो निम्नलिखित असमिकाओं को संतुष्ट करते हों

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\le 18 \\ x + 2y &\le 10 \\ x &\le 0 \\ y &\le 0 \end{aligned}$$

हल : रेखाओं

$$3x + 2y = 18 \text{ और } x + 2y = 10$$

के कोई दो बिन्दु लेकर इन रेखाओं को खींचिए । और, इनके संगत क्षेत्रों

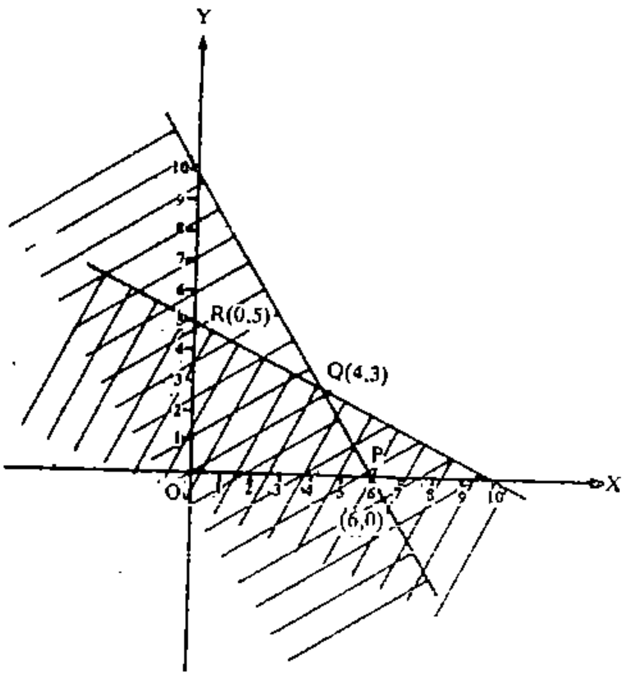
$$3x + 2y \le 18 \text{ और } x + 2y \le 10$$

को छायादार बनाइए ।

क्योंकि

$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

इसलिए बिन्दुओं का समुच्चय प्रथम चतुर्थांश में होगा, जैसाकि चित्र 5 में दिखाया गया है ।



चित्र 5

हल समुच्चय (Solution Set) में चतुर्भुज क्षेत्र OPQR के सभी बिन्दु होते हैं जिनमें परिसीमा और आंतरिक क्षेत्र के बिन्दु भी शामिल हैं। चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु

$$O\ (0, 0),\ P\ (6, 0),\ Q\ (4, 3) \text{ और } R\ (0, 5)$$

हैं जहाँ बिन्दु G, रेखाओं

$$3x + 2y = 18 \text{ और } x + 2y = 10$$

का प्रतिच्छेद-बिन्दु है।

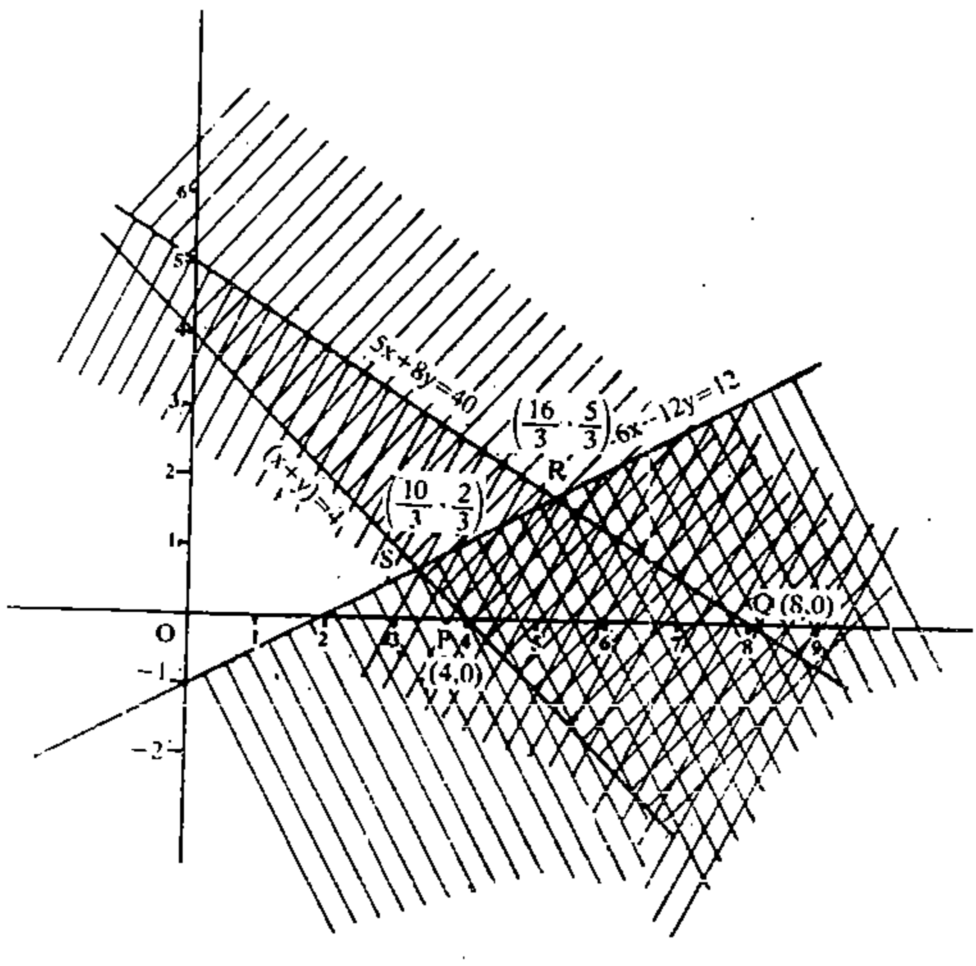
आइए अब हम एक और उदाहरण लें जो ऊपर दिए गए उदाहरण से थोड़ा अलग है।

उदाहरण 4 : **निम्नलिखित असमिकाओं के ग्राफ खींचिए**

$$\begin{aligned} x + y &\geq 4 \\ 6x - 12y &\geq 12 \\ 5x + 8y &\leq 40 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

बताइए कि इन असमिकाओं से परिबद्ध बहुभूज (Polygon) कैसा बहुभुज है।

हल : रेखाएँ खींचकर और रेखाओं से बने क्षेत्रों को छायादार बनाकर यह देख सकते हैं कि बहुभुज वही है जो कि चित्र 6 में दिखाया गया है।



चित्र 6

हल समुच्चय में बहुभुज PQRS के सभी बिन्दु होते हैं जिनमें परिसीमा और आंतरिक क्षेत्र के बिन्दु भी शामिल हैं । बहुभुज के शीर्ष बिन्दु ये हैं

$$P(4, 0),\ Q(8, 0),\ R\left(\frac{16}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ और } S\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए ।

प्रश्न 1 : उन बिन्दुओं के समुच्चय का ग्राफ खींचिए जो निम्नलिखित असमिकाओं को संतुष्ट करते हों

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 6 \\ 2 - y &\geq -4 \\ 2x + y &\leq 8 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 2 : उन बिन्दुओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित असमिका-निकाय (System of Inequalities) को प्रत्येक असमिका को संतुष्ट करते हों । इस समुच्चय का ग्राफ खींचिए और इसके कोने के बिन्दु ज्ञात कीजिए

क)
$$\begin{aligned} x - y &\leq 2 \\ x + 2y &\leq 2 \\ 2x + y &\geq -2 \end{aligned}$$

ख)
$$\begin{aligned} x + y &\leq 2 \\ x \neq y &\leq 0 \\ x - y &\geq -3 \end{aligned}$$

प्रश्न 3 : उन बिन्दुओं के समुच्चय का ग्राफ खींचिए जो निम्नलिखित असमिकाओं को संतुष्ट करते हों

$$\begin{aligned} y - 3x &\leq 2 \\ 2y + 3x &\geq 12 \\ y &\leq 8 \\ y + x &\leq 14 \\ 2x - y &\leq 16 \\ 2x - 5y &\leq 8. \end{aligned}$$

इसके कोने के बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4 : निम्नलिखित असमिकाओं के ग्राफ खींचिए

$$\begin{aligned} 2 - 2y &\geq 6 \\ -x + y &\leq 4 \\ 2x + y &\leq 8 \\ x &\geq 0 \\ -y &\geq 0 \end{aligned}$$

बताइए कि इन असमिकाओं से परिबद्ध बहुभुज कैसा बहुभुज है । इस बहुभुज के शीर्ष बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

2.3 अवमुख समुच्चय और उनकी ज्यामिति (Convex Sets and their Geometry)

भाग 2.2 में हमने यह देखा है कि किस प्रकार दी हुई असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं का समुच्चय ज्ञात किया जाता है । यह बिन्दु-समुच्चय एक **बहुफलक** (Polyhedron) हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है । इस भाग में इन समच्चयों के व्यवहार और इनसे संबंधित कुछ अभिधारणाओं का, जिनकी खंड 2 में, विशेष रूप से खंड की इकाइयों 3 और 4 में आवश्यकता पड़ेगी, अध्ययन करेंगे ।

2.3.1 अवमुख समुच्चयों की अभिधारणा

मानलीजिए x_1 और x_2 यूक्लिडीय समष्टि E^n के कोई दो बिन्दु हैं । एक रेखा लीजिए जो E^n के बिन्दुओं x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ से होकर जाती है और जो निम्न समुच्चय के रूप में परिभाषित हैं

$$S = \{ x : x = \lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1,\ \text{सभी } \lambda \text{ के लिए}\}$$

λ को अलग-अलग मान देकर हम रेखा पर इनके संगत बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं । मानलीजिए λ ऐसा लिया गया है कि $0 \leq \lambda \leq 1$. तब $\lambda = 0$ लेने पर हमें $x = x_1$ प्राप्त होता है और $\lambda = 1$ लेने पर हमें $x = x_2$ प्राप्त होता है । इस तरह x_1 और x_2 के बीच हम अनेक बिन्दु प्राप्त करते हैं । 0 और 1 के बीच लिए गए λ के मानों के संगत प्राप्त इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को प्राय: **रेखा खँड** (Line Segment) कहा जाता है । दूसरे शब्दों में, 0 और 1 के बीच लिए गए λ के मानों के संगत E^n के बिन्दुओं x_1, x_2 को मिलाने वाले रेखा-खंड एक बिन्दु-समुच्चय होता है जिसे S से प्रकट करते हैं, जहाँ

$$S = \{ x : x = lx_2 + (1-l)\, x_1,\ 0 < l < 1\}.$$

अब यहाँ हम **अवमुख समुच्चय** (Convex Set) की परिभाषा देंगे।

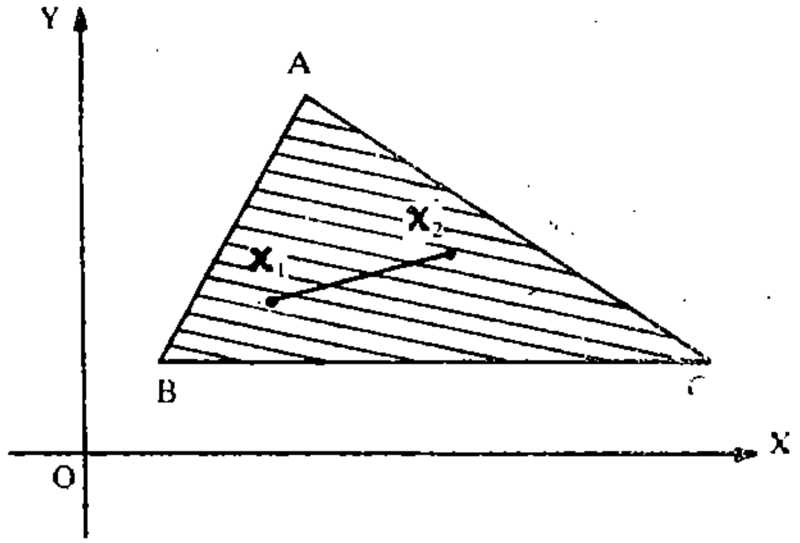
परिभाषा 1 : अवमुख समुच्चय

समुच्चय S को अवमुख समुच्चय कहा जाता है, जबकि इस समुच्चय के कोई दो बिन्दुओं x_1, x_2 हों, तो इनको मिलाने वाला रेखा-खंड भी इस समुच्चय में हो । दूसरे शब्दों में, समुच्चय S को अवमुख समुच्चय कहा जाता है जबकि अवयवों $x_1, x_2 \in S$ के लिए

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1 \in S, \text{ जहाँ } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

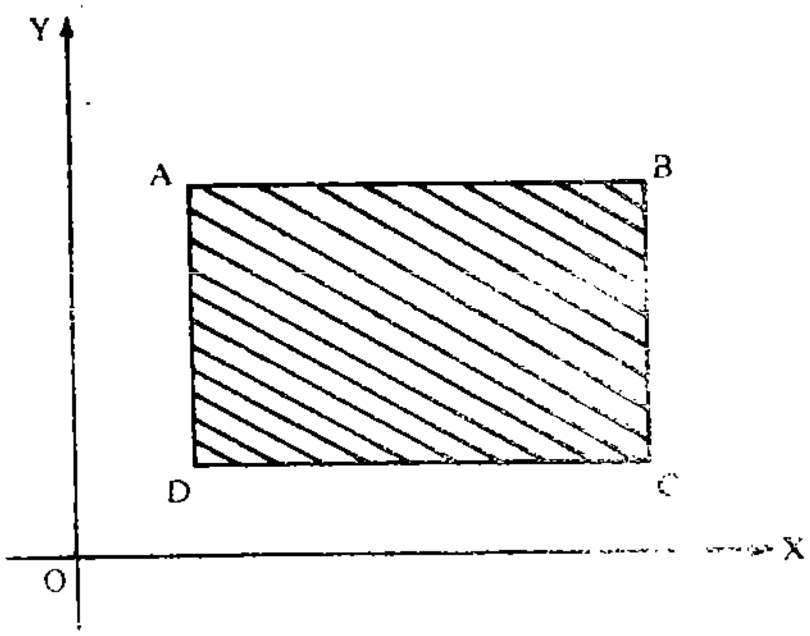
उदाहरण के लिए, त्रिभुज ABC और इसका **अभ्यंतर** (Interior) लीजिए जैसा कि चित्र 7 में दिखाया गया है ।

यदि इस त्रिभुज में कोई दो बिन्दु x_1, x_2 लें, तो x_1 और x_2 को मिलाने वाला रेखा-खंड भी इस त्रिभुज और इसके अभ्यंतर में होता है । इससे यह पता चलता है कि यह एक अवमुख समुच्चय है ।



चित्र 7

इसी प्रकार हम यह देख सकते हैं कि अपने अभ्यंतर सहित वर्ग या आयत अवमुख समुच्चय होता है , जैसा कि चित्र 8 में दिखाया गया है।

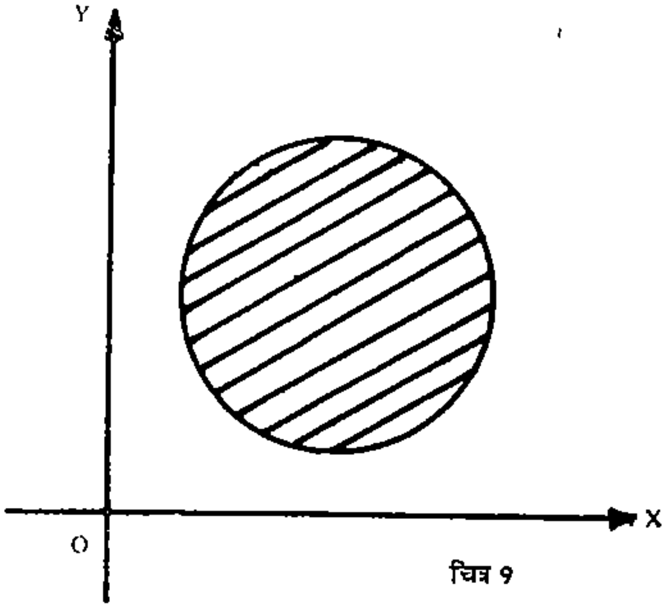


चित्र 8

समुच्चय

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

जो वस्तुत: अपने अभ्यंतर सहित एक वृत्त है । स्पष्ट है कि यह एक अवमुख समुच्चय है । चित्र 9 देखिए ।

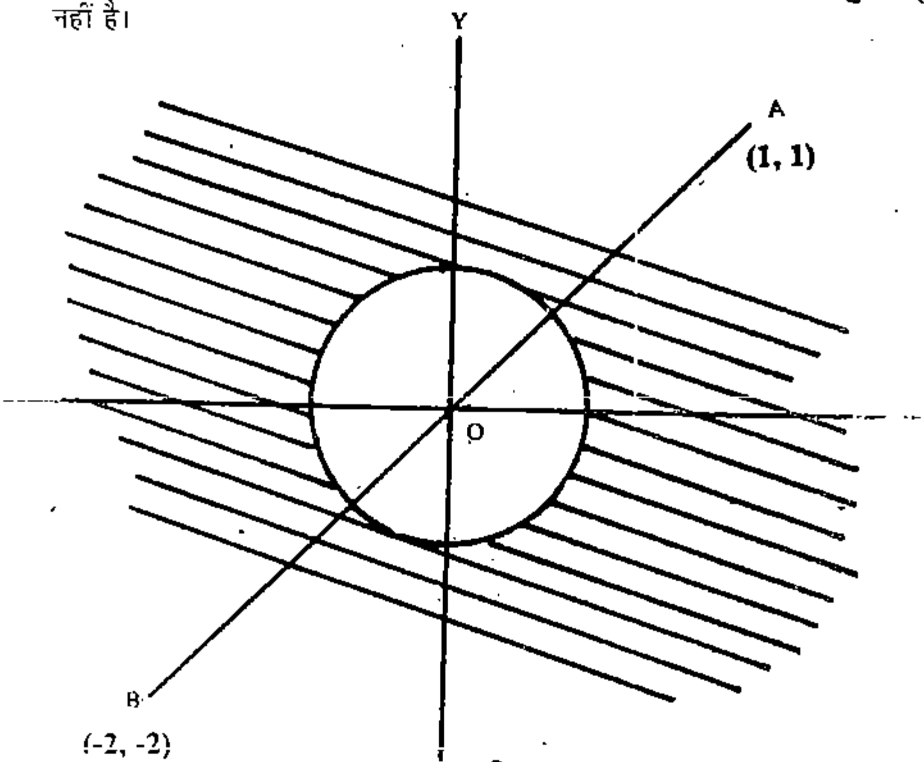


चित्र 9

क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? इसे हल कीजिए।
अब, समुच्चय

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

लीजिए, जो कि अपने बहिर्भाग (Exterior) सहित एक वृत्त है जैसा कि चित्र 10 में दिखाया गया है। अब प्रश्न उठता है कि यह अवमुख समुच्चय है कि नहीं ? यह अवमुख समुच्चय नहीं है।



चित्र 10

आइए हम बिन्दु A (1, 1) और B (2, 2) लें। क्योंकि

$$1^2 + 1^2 > 1 \text{ और } (2)^2 + (2)^2 = 8 > 1$$

इसलिए ये दोनों ही बिन्दु, S के सदस्य हैं। अब, $\lambda = 2/3$ लीजिए। तब

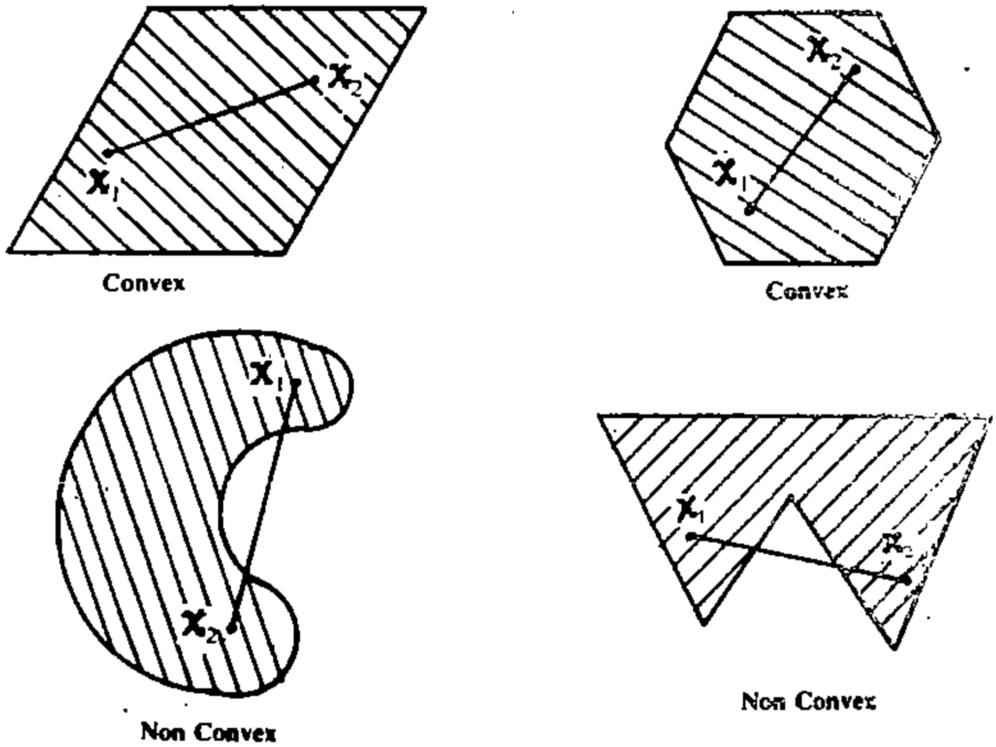
$$\frac{2}{3}(1, 1) + \frac{1}{3}(-2, -2)$$

से बिन्दु (0, 0) प्राप्त होता है पर (0, 0)

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

को संतुष्ट नहीं करता। (क्यों ?)

इससे यह पता चलता है कि S, अवमुख समुच्चय नहीं है। अब यहाँ हम अनवमुख और अवमुख समुच्चयों के कुछ और ग्राफ देंगे, जैसा कि चित्र 11 में दिखाया गया है,



चित्र 11

आइए अब हम निम्नलिखित महत्वपूर्ण प्रमेय का कथन दें और उसे सिद्ध करें।

प्रमेय 1 : यदि S_1 और S_2 दो अवमुख समुच्चय हों, तो उनका सर्वनिष्ठ भी एक अवमुख समुच्चय होता है।

उपपत्ति : मानलीजिए $S_3 = S_1 \cap S_2$

मानलीजिए x_1, x_2, S_3 के कोई दो बिन्दु हों। तब

$$x_1, x_2 \in S_1 \text{ और } x_1, x_2 \in S_2.$$

क्योंकि S_1 और S_2 अवमुख समुच्चय हैं, इसलिए

$$\lambda x_2 + (1 - \lambda)\, x_1 \in S_1, \text{ जहाँ } 0 \leq \lambda \leq 1$$

और $$\lambda x_2 + (1 - \lambda)\, x_1 \in S_1, \text{ जहाँ } 0 \leq \lambda \leq 1$$

अत:

$$\lambda x_2 + (1 - \lambda)\, x_1 \in S_1 \cap S_2, \text{ जहाँ } 0 \leq \lambda \leq \lambda\, 1.$$

अर्थात्

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1 \in S_1, \text{ जहाँ } 0 \le \lambda \le 1.$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि S_3, एक अवमुख समुच्चय है ।

नीचे दिए गए उदाहरणों से आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि दिए हुए समुच्चय अवमुख समु...
नहीं ।

उदाहरण 5 : दिखाइए कि समुच्चय

$$S = \{ (x, y) \mid 3x^2 + 2y^2 \le 6 \}$$

अवमुख समुच्चय है ।

हल: मानलीजिए $(x_1, y_1) \in S, (x_2, y_2) \in S$ कोई दो बिन्दु हैं ।

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1^2 + 2y_1^2 \le 6 \\ 3x_2^2 + 2y_2^2 \le 6 \end{array}\right]$$

समुच्चय S एक अवमुख समुच्चय तब होता है, जबकि

$$\lambda (x_2, y_2) + (1-\lambda)(x_1, y_1) \in S, \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

अर्थात्

$$[\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1\ \lambda y_2 + (1-\lambda)\, y_1] \in S, \qquad 0 \le \lambda \le 1,$$

अब,

$$3\,[\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1]^2 + 2\,[\,\lambda y_2 + (1-\lambda)\, y_1]^2$$

$$= \lambda^2 (3x_2^2 + 2y_2^2) + (1-\lambda)^2 (3x_1^2 + 2y_1^2) + 2\lambda(1-\lambda)\,(3x_1x_2 + \ldots$$

$$\le 6\lambda^2 + 6\,(1-\lambda)^2 + 2\lambda\,(1-\lambda)\,(3x_1x_2 + 2y_1y_2) \qquad (\ldots)$$

इसलिए,

$$3\,[\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1]^2 + 2\,[\lambda y_2 + (1-\lambda)\, y_1]^2$$

$$\le 6x^2 + 6\,(1-\lambda)^2 + 2\lambda\,(1-\lambda)\,(3x_1x_2 + 2y_1y_2) \qquad \ldots(2)$$

अब,

$$3\,(x_1 - x_2)^2 + 2(y_2 - y)^2 \ge 0$$

अर्थात् $(3x_1^2 + 2y_1^2) + (3x_2^2 + 2y_2^2) - 2(3x_1x_2 + 2y_1y_2) \ge 0$

अर्थात् $(3x_1x_2 + 2y_1y_2) \le (3x_1^2 + 2y_1^2) + (3x_2^2 + 2y_2^2) \le 6 + 6 \ldots$

इस तरह,

$$3x_1x_2 + 2y, y_2 \le 6$$

(2) और (3) से हमें यह प्राप्त होता है

$$3(\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1)^2 + 2(\lambda y_2 + (1-\lambda) y_1^2) \le 6\lambda^2\ 6(1-\lambda)^2 + 12\lambda(1-\ldots$$

$$= 6(\lambda + (1-\lambda)^2)^2 = 6$$

अत:

$$3\lambda x_2 + ((1-\lambda)\, x_1)^2 + 2\,(\lambda y_2 + (1-\lambda y_1)^2 \leq 6.$$

इससे यह पता चलता है कि

$$\lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)\, y_1) \in S$$

अत: समुच्चय S, एक अवमुख समुच्चय है।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि समुच्चय S $\{(x, y) : xy \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ अवमुख समुच्चय नहीं है।

हल : यह दिखाने के लिए कि S, अवमुख समुच्चय है कि नहीं, हम यह दिखाएंगे कि यदि हम S के कोई दो बिन्दु लें, तो उनका **अवमुख संयोजन** (Convex Combination) समुच्चय S का सदस्य नहीं होता। स्पष्ट है कि $(3, y_3)$ और $(y_2, 2)$ समुच्चय S के सदस्य हैं। आइए अब हम इन बिन्दुओं का अवमुख संयोजन लें अर्थात्

$$\lambda\,(3, 1/3) + (1 - \lambda)\,(1/2, 2) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

अर्थात्
$$\left[3\lambda + \frac{1}{2}(1-\lambda), \frac{\lambda}{3} + 2(1-\lambda)\right] \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

अर्थात्
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda, 2 - \frac{5}{3}\lambda\right) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

समुच्चय S अवमुख समुच्चय होगा, यदि सभी λ के लिए

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda, 2 - \frac{5}{3}\lambda\right) \in S \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

अर्थात्
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda\right)\left(2 - \frac{5}{3}\lambda\right) \leq 1 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

अर्थात्
$$\frac{1}{2} + 5\lambda - \frac{5}{6}\lambda - \frac{25}{6}\lambda^2 \leq \lambda \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\frac{25}{6}\lambda - \frac{25}{6}\lambda^2 \leq 0 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

यह असमिका λ के सभी मानों पर लागू होनी चाहिए, जहाँ $0 \leq \lambda \leq 1$.

लेकिन, यदि आप $\lambda = \frac{1}{2}$ लें, तो आपको यह प्राप्त होगा

$$\frac{25}{6}\lambda - \frac{25}{6}\lambda^2 = \frac{25}{12} - \frac{25}{24} = \frac{25}{24} > 0$$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि $\lambda = \frac{1}{2}$ पर यह असमिका संतुष्ट हो जाती है।

इस अंतर्विरोध से यह पता चलता है कि S एक अवमुख समुच्चय नहीं है।

प्रश्न 5 : बताइए कि निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-कौन से समुच्चय अवमुख समुच्चय हैं

(क) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

(ख) $S = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 6\}$

(ग) $S = \{(x, y) \mid x \geq 2, y \leq 4\}$.

ग्राफ खींचकर अपने परिणाम की पुष्टि कीजिए।

2.3.2 अवमुख समुच्चय के चरम बिन्दु

भाग (2-2) में आप वहुभुजों के रूप में अवमुख समुच्चयों के उदाहरण लिए हैं। हमारे लिए इन वहुभुजों के शीर्ष बिन्दुओं का काफी महत्व है। हम इन शीर्ष बिन्दुओं को चरम बिन्दु (Extreme Point) कहते हैं जिसकी परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा 2 : चरम बिन्दु (**Extreme Point**)

मानलीजिए S एक अवमुख समुच्चय है। बिन्दु $x \in S$, अवमुख समुच्चय S का एक चरम बिन्दु होता है यदि और केवल यदि समुच्चय S में ऐसे बिन्दु x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ न हों, जिससे कि

$$x = (1-\lambda)\, x_1 + \lambda x_2 \qquad 0 < \lambda < 1$$

आइए अब हम इस परिभाषा पर अच्छी तरह से विचार करें। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि विन्दु

$$x = (1-\lambda)\, x_1 + \lambda x_2, \qquad 0 < \lambda < 1$$

x_1 और x_2 $(x_1 \neq x_2)$ के बीच स्थित एक बिन्दु है।

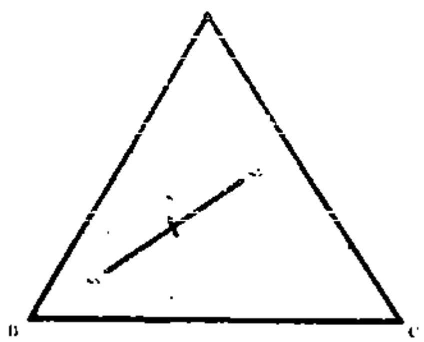
ऊपर दी गई परिभाषा के अनुसार इस गुणधर्म को चरम बिन्दु संतुष्ट नहीं करता। उदाहरण के लिए त्रिभुज ABC और इसके अभ्यंतर से वना एक अवमुख समुच्चय S लीजिए। (चित्र 12 देखिए) यदि x_1 त्रिभुज ABC के अंदर एक बिन्दु हो, तो S में ऐसे बिन्दु और x_1 और x_2 प्राप्त किए जा सकते हैं जिससे कि

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

यदि x समुच्चय S का एक **परिसीमा बिन्दु** (Boundary Point) हो जो कि A, B और C से भिन्न हो, तो हम S में ऐसे बिन्दु x_1 और x_2 प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि

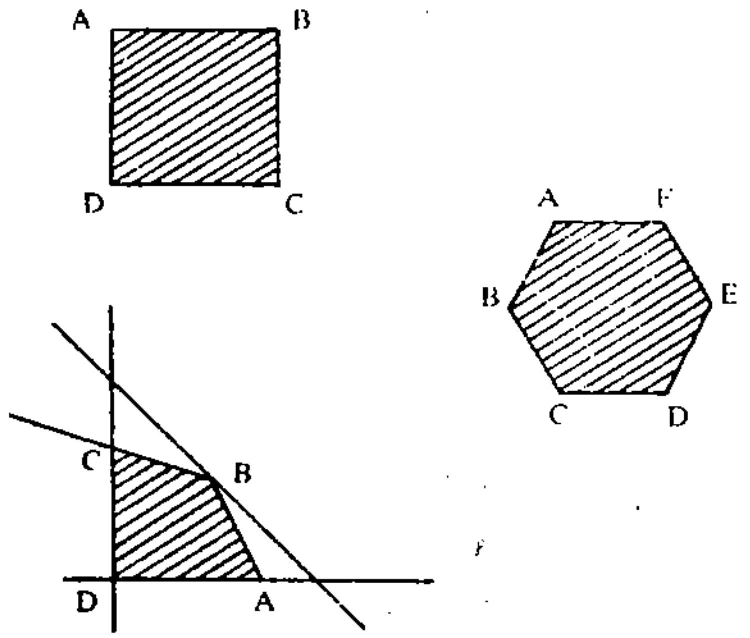
$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

पर, बिन्दुओं A, B और C के साथ ऐसा संभव नहीं है। यही कारण है कि बिन्दुओं A, B और C को समुच्चय S का चरम बिन्दु कहा जाता है।



चित्र 12

यदि हम वृत्त लें तो उसकी परिधि का प्रत्येक बिन्दु एक चरम बिन्दु होता है । क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? इसे हल कीजिए और आकृति 13 में इन्हें देखिए ।



चित्र 13

2.3.3 ऊनविम समतल (Hyper Plane) और अर्ध समष्टियाँ (Half Spaces)

भाग 2.2 में हमने यह देखा है कि एक समतल को एक रेखा तीन भागों में विभाजित करती है । एक **n-विम समतल** (n-dimensional plane) लीजिए जो **यूक्लिडीय समष्टि** E^n (Euclidean Space E^n) को तीन भागों में विभाजित करता है । इस प्रकार के समतल को **ऊनविम समतल** (Hyper Plane) कहते हैं ।

आप जानते हैं कि $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ (c_1, c_2, d अचर हैं) E^2 की एक सरल रेखा समीकरण है। इसी प्रकार, $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d$, E^3 के एक समतल का समीकरण है । इसी संकल्पना का व्यापकीकरण करके E^n के एक ऊनविम समतल के समीकरण को परिभाषित किया जा सकता है । हम ऊनविम समतल की परिभाषा इस प्रकार देते हैं :

परिभाषा 3 : ऊनविम समतल

E^n का एक ऊनविम समतल निम्नलिखित बिन्दु-समुच्चय S होता है

$$S = \{ x \in E^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = d\}$$

अर्थात् $$S = \{ x \in E^n : cx = d\}$$

जहाँ $$c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

E^n का ऊनविम समतल $cx = d$, E^n को तीन **परस्पर अपवर्जी** (Mutually Exclusive) और निश्शेष (Exhaustive) प्रदेशों में विभाजित करता है । इन प्रदेशों (regions) को निम्नलिखित समुच्चयों से प्रकट किया जाता है

$$S_1 = \{ x : cx < d\}$$

$$S_2 = \{ x : cx = d\}$$

$$S_3 = \{ x : cx < d\}$$

समुच्चयों S_1 और S_3 को **विवृत अर्ध समष्टियाँ** (Open Half Spaces) कहा जाता है । समुच्चयों

$$S_4 = \{ x \mid cx \le d\} \text{ और } S_5 = \{ x \mid cx \ge d\}$$

को **संवृत अर्ध समष्टियाँ** (Closed Half Spaces) कहा जाता है । ध्यान दीजिए कि $S_4 \cap S_5 = S_2$, जो कि ऊनविम समतल $x = d$ है ।

अब हम यह दर्शाएँगे कि ऊनविम समतल, विवृत्त अर्ध समष्टियाँ और संवृत अर्ध समष्टियाँ सभी अवमुख समुच्चय होते हैं ।

प्रमेय 2 : **ऊनविम समतल एक अवमुख समुच्चय होता है ।**

उपपत्ति : दूसरे शब्दों में, हमें यह सिद्ध करना है कि संग्रह

$$S = \{ x \in E^n : cx = d\}$$

एक अवमुख समुच्चय है ।

यदि x_1, x_2 ऊनविम समतल $cx = d$ के कोई दो बिन्दु हों, तो $cx_1 = d$ और $cx_2 = d$.

ऊनविम समतल तब अवमुख होगा जबकि $x = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1$, जहाँ $0 \le \lambda \le 1$.

ऊनविम समतल पर स्थित हो । वास्तव में हमें यह प्राप्त होता है

$$cx = c \{ \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1\}$$

$$= \lambda cx_2 + (1-\lambda) cx_1$$

$$= \lambda d + (1-\lambda) d.$$

$$\therefore \quad cx = d.$$

इससे यह पता चलता है कि ऊनविम समतल एक अवमुख समुच्चय है । इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है ।

प्रमेय 3 : **संवृत अर्ध समष्टि एक अवमुख समुच्चय होती है ।**

उपपत्ति : निम्नलिखित संवृत अर्ध समष्टि लीजिए

$$S_4 = \{ x : cx \le d\}$$

मानलीजिए $x_1, x_2 \in S_4$, तो $cx_1 \le d$., $cx_2 \le d$.

$$x = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1, 0 \le \lambda \le 1 \text{ लीजिए}$$

अब $$cx = \lambda cx_2 + (1-\lambda)\, cx_1 \le \lambda d + (1-\lambda)\, d = d.$$

अर्थात् $$cx \le d.$$

इससे यह पता चलता है कि

$$x = \lambda x_2 + (1-\lambda)\, x_1 \in S, \text{ जहाँ } 0 \le \lambda \le 1.$$

अतः S एक अवमुख समुच्चय है ।

प्रश्न 6 : दिखाइए कि S_1, S_3 और S_5 अवमुख समुच्चय हैं ।

अब यहाँ हम कुछ और परिभाषाऐं तथा (उपपत्ति के बिना) परिमेय देंगे जो कि खंड 2 में काफी उपयोगी सिद्ध होंगे ।

और अधिक विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के लिए आप जी. हार्डी की पुस्तक "लिनियर अल्जेब्रा" को पढ़ सकते हैं ।

परिभाषा 4 : अवमुख संयोजन (Convex Combination)

मानलीजिए $x_1, x_2, ..., x_m$ यूक्लिडीय समष्टि E^n की कुछ विन्दुएं हैं । विन्दुओं $x_1, x_2, ..., x_m$ का अवमुख संयोजन निम्नलिखित बिन्दु होता है

$$x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i,\ \mu_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., m$$

जहाँ $$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1.$$

अब हम (उपपत्ति के बिना) एक प्रमेय का कथन देंगे :

प्रमेय 4 : परिमित संख्या में E^n के बिन्दुओं के सभी अवमुख संयोजनों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है, अर्थात् समुच्चय

$$S = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i,\ \mu_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}$$

अवमुख समुच्चय है ।

परिभाषा 5 : अवमुख समावरक (Convex Hull)

मानलीजिए A एक समुच्चय है जो अवमुख नहीं है । तब लघुतम अवमुख समुच्चय को, जो A को आविष्ट करता है, A का **अवमुख समावरक** (Convex Hull) कहा जाता है । अर्थात् समुच्चय A का अवमुख समावरक उन सभी अवमुख समुच्चयों का सर्वनिष्ठ होता है जो A को आविष्ट करते हैं ।

उदाहरण के लिए, समुच्चय

$$A = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}$$

का अवमुख समावरक निम्नलिखित समुच्चय होता है

$$S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \}$$

यहाँ S अवमुख है और A को आविष्ट करता है। यहाँ आप यह भी देख सकते हैं कि S, समुच्चय A को आविष्ट करने वाला लघुतम अवमुख समुच्चय है। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि किसी वृत्त की परिधि के बिन्दुओं का **अवमुख समावरक** (Convex Hull) वृत्त की परिधि और उसका **अभ्यंतर** (Interior) होता है। परिधि को अविष्ट करने वाला यह एक लघुतम अवमुख समुच्चय है।

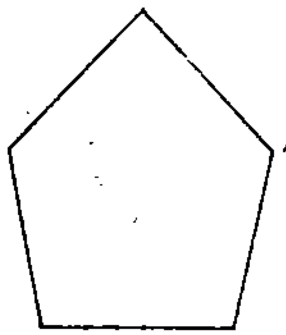
अब हम (उपपत्ति के बिना) एक और प्रमेय का कथन देंगे।

प्रमेय 5 : **परिमित संख्या में E^n के बिन्दुओं $x_1, x_2, ..., x_m$ का अवमुख समावरक $x_1, x_2, ..., x_m$ के सभी अवमुख संयोजन का समुच्चय होता है।**

अर्थात् $x_1, x_2, ..., x_m$ अवमुख समावरक निम्नलिखित समुच्चय होता है,

$$S = \left\{ x \in E^n : x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i, \text{ सभी } \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}$$

परिमित संख्या में लिए गए बिन्दुओं के अवमुख समावरक को इन बिन्दुओं से बना अवमुख बहुफलक (Convex Polyhedron) कहा जाता है। चित्र 14 में पांच बिन्दुओं से बना अवमुख बहुफलक दिखाया गया है।



चित्र 14

यदि हम एक समतल के तीन बिन्दुओं का अवमुख समावरक लें, तो यह एक त्रिभुज होता है।

प्रश्न 7 : मानलीजिए कि

$$x_1 = (0, 0),\ x_2 = (2, 0),\ x_3 = (1, 1)$$

निम्नलिखित को बिन्दुओं x_1, x_2 और x_3 के अवमुख रैखिक संयोजन (Convex Linear Combination) के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

(ii) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2.4 सारांश (Summary)

आपको याद होगा कि

1. $ax + by \leq c$ और $ax + by \geq c$ असमिकाएं हैं,

2. xy-समतल को रेखा $ax + by = c$ तीन प्रदेशों में विभाजित करती हैं जबकि

   i) ऐसे बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय दिए हुए हों, जिससे कि $ax + by = c$.

   ii) ऐसे बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय दिए हुए हों, जिससे कि $ax + by < c$,

   अर्थात् समतल का एक अर्धभाग रेखा से परिबद्ध हो।

   iii) ऐसे बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय दिए हुए हों, जिससे कि $ax + by > c$, अर्थात् समतल का दूसरा अर्धभाग रेखा से परिबद्ध हो।

3. समुच्चय S अवमुख समुच्चय तब होता है जबकि यदि x_1, x_2 समुच्चय के कोई दो बिन्दु हों, तो इन बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा-खंड भी समुच्चय में होता है।

4. बिन्दु $x \in S$, अवमुख समुच्चय S का एक चरम बिन्दु होता है जबकि समुच्चय में ऐसे बिन्दु x_1, y_1 $(x_1 \neq x_2)$ न होते हों, जिससे कि

$$x = (1-\lambda)\, x_1 + \lambda x_2 \qquad 0 < \lambda < 1.$$

5. समुच्चय $[\, x \in E^n : cx = d]$

   E^n का एक ऊनविम समतल है। ऊनविम समतल $cx = d$. E^n को निम्नलिखित तीन समुच्चयों में विभाजित करता है

$$S_1 = [\, x \mid cx < d\,]$$

$$S_2 = [\, x \mid cx = d\,]$$

$$S_3 = [\, x \mid cx > d\,]$$

   S_1 और S_3 को विवृत अर्ध समष्टियाँ कहा जाता है।

6. विवृत अर्ध समष्टियाँ, संवृत अर्ध समष्टियाँ और ऊनविम समतल अवमुख समुच्चय हैं।

7. समुच्चय A का अवमुख समावरक समुच्चय A को आविष्ट करने वाला लघुतम अवमुख समुच्चय होता है। परिमित संख्या में लिए गए बिन्दुओं का अवमुख समावरक इन बिन्दुओं के सभी अवमुख संयोजनों का समुच्चय होता है।

2.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

प्रश्न 2) क) कोने के बिन्दु $(0, -2)$, $(2, 0)$ और $(-2, 2)$ हैं

ख) कोने के बिन्दु $(0, 0)$, $(3, 0)$ हैं।

प्रश्न 3) कोने के बिन्दु $(4, 0)$, $(9, 2)$, $(10, 4)$, $(6, 8)$, $(2, 8)$, $\left(\frac{8}{9}, \frac{14}{3}\right)$ हैं

प्रश्न 4) शीर्ष बिन्दु $(0, 3)$, $(0, 4)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ हैं

प्रश्न 5) क) अवमुख नहीं है

ख) अवमुख

ग) अवमुख

प्रश्न 7) i) $\left[1, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3$

ii) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3$

2.6 शब्दावली

अभ्यंतर	interior
अर्ध समतल	half plane
अर्ध समष्टि	half space
अवमुख	convex
अवमुख संयोजन	convex combination
अवमुख समुच्चय	convex set
अवमुख समावरक	convex hull
ऊनविम समतल	hyperplane
चरम बिन्दु	extreme point
बहिर्भाग	exterior
विवृत अर्ध समष्टि	open half space
संवृत अर्ध समष्टि	closed half space

इकाई 3 दो चरों में इष्टतमीकरण (Optimization in Two Variables)

इकाई की रूपरेखा (Structure of the Unit)

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 1 में हमने आव्यूहों, सारणिकों और सदिशों की कुछ उन महत्वपूर्ण संकल्पनाओं पर पुनर्विचार किया है जिनका संबंध खंड 2 में चर्चा की जाने वाली सामग्री से है। इकाई 2 में हमने असमिकाओं और उनके ग्राफीय हल पर चर्चा की है। इसी इकाई में हमने आपको अवमुख समुच्चय, चरम बिन्दु और अन्य संबंधित परिभाषाओं तथा (उपपत्ति के बिना) प्रमेयों के रूप में कुछ परिणामों से परिचित कराया है जिनका प्रयोग हम इस इकाई में काफी करेंगे। सबसे पहले हम केवल दो चरों वाले उदाहरण लेकर और उनका गणितीय संरूप देकर **रैखिक प्रोग्रामन** (Linear Programming) का अध्ययन करेंगे। इसके बाद हम ज्यामितीय विधि (ग्राफीय विधि) से प्राप्त किए गए इसके हल पर चर्चा करेंगे और साथ ही इसके **सुसंगत** (Feasible) और **इष्टतम** (Optimal) हलों का अंतर्ज्ञानात्मक अर्थ प्रस्तुत करेंगे। अंत में, हम दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि से **परिबद्ध समुच्चय** (Bounded Set) और **अपरिबद्ध समुच्चय** (Unbounded Set) पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- दो चरों वाली एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को संरूपित कर सकेंगे
- ज्यामितीय विधि से दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कर सकेंगे
- उस बिन्दु को ज्ञात कर सकेंगे जहाँ इष्टतम हल प्राप्त होता है
- परिबद्ध समुच्चय और अपरिबद्ध समुच्चय में भेद कर सकेंगे।

3.2 गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation)

जैसा कि आप जनते हैं कि किसी भी व्यापार-एजेन्सी या उद्योग और यहाँ तक कि किसी भी देश के पास जमीन, श्रम, पूँजी, संगठन सुविधाओं आदि के रूप में सीमित साधन होते हैं जबकि उनकी आवश्यकताएं काफी होती हैं और यहाँ तक कि कभी-कभी असीमित होती हैं। क्योंकि उपलब्ध साधन काफी सीमित होते हैं अत: हमारी समस्या इन उपलब्ध साधनों का इस तरह उपयोग करने की है, जिससे कि अधिक से अधिक उत्पादन या लाभ प्राप्त किया जा सके या उत्पादन-लागत को कम से कम किया जा सके। इस प्रकार की समस्याओं को **इस्टतमीकरण समस्या** (Optimization Problems) कहा जाता है। अपनी विशेष संरचना के कारण इनमें से कुछ इस्टतमीकरण समस्याओं को **रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ** (Linear Programming Problems) कहा जाता है। इस भाग में आप यह देखेंगे कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण के लिए, आहार समस्या एक प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या रही है। इसका सबसे पहला प्रयोग अस्पतालों में रोगियों के लिए सस्ते से सस्ता आहार उपलब्ध कराने में किया गया था।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण करने के लिए यह आवश्यक है कि आप (i) निर्णय चर (Decision Variable), (ii) **उद्देश्य फलन** (Objective Function) और (iii) **व्यवरोधों** (Constraints) से अच्छी तरह से परिचित हो जाएँ। इसके लिए यहाँ हम कुछ उदाहरण लेंगे और इनसे संबंधित कुछ समस्याओं का संरूपण करेंगे। यहाँ हम अपनी चर्चा **अधिकतमीकरण** (Maximization) और **न्यूनतमीकरण** (Minimization) समस्याओं तक ही सीमित रखेंगे।

3.2.1 अधिकतमीकरण समस्यायें (Maximization Problems)

यहाँ हम कुछ उदाहरण लेकर **उत्पाद-मिश्रण समस्या** (Product-mix Problem) और **निवेश समस्या** (Investment Problem) नामक दो विशेष एवं लोकप्रिय समस्याओं पर चर्चा करेंगे और उनके संगत गणितीय संरूप व्युत्पन्न करेंगे ।

I. उत्पाद-मिश्रण समस्या (Product-mix Problems)

उदाहरण 1 : एक फर्म दो उत्पाद A और B बनाता है । उत्पाद A की एक इकाई को मशीन I से बनाने में 2 घंटे लगते हैं और मशीन II से बनाने में 3 घंटे लगते हैं । उत्पाद B की एक इकाई को मशीन I से बनाने में 3 घंटे लगते हैं और मशीन II से बनाने में 1 घंटा लगता है । मशीन I और मशीन II का कार्य करने की दैनिक क्षमता क्रमश: 12 घंटा और 8 घंटा है । A की एक इकाई को और B की एक इकाई को वेचने पर क्रमश: 4रु० और 5रु० लाभ होता है । समस्या यह मालूम करना है कि उत्पाद A और उत्पाद B को प्रतिदिन कितना बनाया जाए जिससे कि लाभ का अधिकतमीकरण किया जा सके ।

हल : मानलीजिए उत्पाद A का दैनिक उत्पादन x_1 है और उत्पाद B का दैनिक उत्पादन x_2 है । इस समस्या में **व्यवरोध** (Constraints) प्रतिदिन मशीन I और मशीन II पर समय की सीमित उपलब्धता है । उत्पाद की एक इकाई को मशीन I से बनाने में 2 घंटे लगते हैं और मशीन II से बनाने में 3 घंटे लगते हैं । दूसरे शब्दों में, उत्पाद A की x_1 इकाई को मशीन I से बनाने में $2x_1$ घंटे लगेंगे और, इसी तरह, उत्पाद B की x_2 इकाई को मशीन I से बनाने में $3x_2$ घंटे लगेंगे । इस तरह, मशीन I को प्रतिदिन

$$(2x_1 + 3x_2) \text{ घंटे}$$

काम करने की आवश्यकता होगी । इसी प्रकार मशीन II को प्रतिदिन

$$(3x_1 + x_2) \text{ घंटे}$$

काम करने की आवश्यकता होगी ।

क्योंकि मशीन I एक दिन में 12 घंटे से अधिक काम नहीं कर सकती और मशीन II एक दिन में 8 घंटे से अधिक काम नहीं कर सकती, इसलिए

$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$3x_1 + x_2 \le 8.$$

क्योंकि कोई निर्माता ऋणात्मक राशि में उत्पादन नहीं कर सकता है इसलिए यहाँ हम यह प्रतिबंध लगा लेते हैं कि चर x_1 और x_2 के केवल **ऋणेतर मान** (Non-negative Values) ही होंगे अर्थात् $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. दैनिक लाभ यह होता है

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

क्योंकि हमारा उद्देश्य लाभ का अधिकतमीकरण करना है, इसलिए, उत्पादन-मिश्रण समस्या का रैखिक प्रोग्रामन निदर्श (Model) यह हो जाएगा :

ऐसे x_1, x_2 ज्ञात कीजिए जिससे कि

$$\mathbf{Z = 4x_1 + 5x_2}$$

अधिकतम हो जाए, जबकि प्रतिबंध यह है

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

चरों x_1 और x_2 को निर्णय चर (Decision Variable) कहा जाता है, Z को उद्देश्य फलन (Objective Function) कहा जाता है और असमिकाओं को व्यवरोध (Constraints) कहा जाता है ।

II. निवेश समस्या (Investment Problem)

उदाहरण 2 : एक फुटकर दुकानदार कुछ पंखे और सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है । इसके लिए उसके पास केवल 5760रु० हैं और उसके पास अधिक से अधिक 20 माल रखने की जगह हैं । एक पंखे की कीमत 360रु० है और सिलाई मशीन की कीमत 240 रु० है । वह प्रति पंखे को 22रु० के लाभ पर और प्रति सिलाई मशीन को 18रु० के लाभ पर बेचना चाहता है । यदि यहाँ यह मान लीजिए कि जितना माल वह खरीदता है वह सभी का सभी बेच सकता है, तो अधिकतम लाभ कमाने के लिए उसे किस मद में कितनी राशि लगानी चाहिए ?

हल : मानलीजिए Z कुल लाभ को प्रकट करता है

मानलीजिए वह पंखे की x_1 इकाइयाँ खरीदता है और सिलाई मशीन की x_2 इकाइयाँ । क्योंकि वह पंखे को 22रु० के लाभ पर बेचता है और सिलाई मशीन को 18रु० के लाभ पर, इसलिए कुल लाभ यह होगा

$$Z = 22x_1 + 18x_2$$

क्योंकि वह एक पंखे को 360रु० में और एक सिलाई मशीन को 240रु० में खरीदता है । इसलिए उसके द्वारा खर्च की गई कुल राशि $360x_1 + 240x_2$ होगी । और उपलब्ध राशि 5760रु० है । इसलिए,

$$360x_1 + 24x_2 \leq 5760$$

खरीदे गए कुल मदों की संख्या = $x_1 + x_2$ और, क्योंकि उसके पास अधिक से अधिक 20 मदों को रखने की जगह है, इसलिए

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

और, क्योंकि ऋण राशियाँ नहीं खरीदी जा सकती, इसलिए

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

इस तरह, रैखिक प्रोग्रामन समस्या ऐसे (निर्णय चर) x_1, x_2 ज्ञात करते हैं जो कि (उद्देश्य फलन)

$$Z = 22x_1 + 18x_2$$

का अधिकतमीकरण कर दें, जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} 360x_1 + 240x_2 &\leq 5760 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

अब आप इसी प्रकार नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं ।

प्रश्न 1 : एक फर्म दो प्रकार के फर्नीचर-कुर्सी और मेज बनाता है । लेखा विभाग द्वारा हिसाब लगाने पर एक कुर्सी को बनाने में 20रु॰ का खर्च आता है और एक मेज को बनाने में 30रु॰ का खर्च आता है । ये दोनों फर्नीचर तीन मशीनों M_1, M_2 और M_3 से बनाए जाते हैं । प्रत्येक उत्पाद को बनाने में लगने वाला समय (घंटों में) और प्रत्येक मशीन पर एक सप्ताह में उपलब्ध कुल समय (घंटों में) निम्नलिखित है ।

मशीन	कुर्सी	मेज	उपलब्ध समय (घंटों में)
M_1	3	3	36
M_2	5	2	50
M_3	2	6	60

निर्माता को अपने उत्पादन का नियोजन किस प्रकार करना चाहिए जिससे कि वह योगदान का अधिकतमीकरण कर सके ।

प्रश्न 2 : एक फर्म दो उत्पाद A और B बनाता है और उसकी कुल उत्पादन क्षमता प्रतिदिन 9 टन की है । जहाँ A और B के उत्पादन के लिए समान उत्पादन क्षमता की आवश्यकता होती है । इस फर्म का एक अन्य कंपनी के साथ प्रतिदिन कम से कम 2 टन उत्पाद A और कम से कम 3 टन उत्पाद B की सप्लाई करने का एक स्थाई ठेका है । एक टन उत्पाद A के लिए 20 मशीन घंटा उत्पादन समय की आवश्यकता होती है और एक टन उत्पादन B के लिए 50 मशीन घंटा उत्पादन समय की आवश्यकता होती है और प्रतिदिन अधिकतम संभव मशीन घंटा 360 है । फर्म में बताए गए सभी उत्पाद को बेचा जा सकता है और एक टन उत्पाद A पर 80रु॰ का और एक टन उत्पाद B पर 120रु॰ का लाभ होता है । अधिकतम लाभ के लिए उत्पादन अनुसूची मालूम कीजिए ।

आइए अब हम कुछ ऐसे उदाहरण लें, जहाँ उद्देश्य फलन का अधिकतमीकरण करने के स्थान पर हमें उसका न्यूनतमीकरण (minimize) करना हो ।

3.2.2 न्यूनतमीकरण समस्या (Minimization Problems)

इसके लिए यहाँ हम सुप्रसिद्ध न्यूनतमीकरण समस्या अर्थात् आहार समस्या और निरीक्षण समस्या पर विचार करेंगे ।

III. आहार समस्या (Diet Problem)

उदाहरण 3 : दो अलग-अलग खाद्य पदार्थों F_1 और F_2 में विटामिन A और विटामिन B हैं। एक इकाई खाद्य पदार्थ F_1 में 2 इकाई विटामिन A और 3 इकाई विटामिन B होता है । एक इकाई खाद्य पदार्थ F_2 में 4 इकाई विटामिन A और 3 इकाई विटामिन B होता है । एक इकाई खाद्य पदार्थ F_1 पर 3रु॰ का खर्च बैठता है और एक इकाई खाद्य पदार्थ F_2 पर 2.50रु॰ का खर्च बैठता है । एक व्यक्ति के लिए प्रतिदिन कम से कम 40 इकाई विटामिन A की और 50 इकाई विटामिन B की आवश्यकता होती है । यह मान लेने पर कि प्रतिदिन कम से कम जितनी मात्रा में विटामिन A और विटामिन B की आवश्यकता होती है उससे अधिक मात्रा में विटामिन A और विटामिन B को ले लेने पर कोई नुकसान नहीं होता, न्यूनतम लागत पर खाद्य पदार्थ F_1 और F_2 का इष्टतम मिश्रण मालूम कीजिए जो कि विटामिन A और विटामिन B की दैनिक न्यूनतम आवश्यकता की पूर्ति कर देता है ।

हल : मानलीजिए Z, कुल लागत को प्रकट करता है ।

मानलीजिए

x_1 = खाद्य पदार्थ F_1 की इकाइयों की संख्या

और

x_2 = खाद्य पदार्थ F_2 की इकाइयों की संख्या

खाद्य पदार्थ F_1 की x_1 इकाइयों में और खाद्य पदार्थ F_2 की x_2 इकाइयों में विटामिन A की इकाइयों की संख्या $2x_1 + 4x_2$ हैं क्योंकि प्रतिदिन विटामिन A की न्यूनतम आवश्यकता 40 इकाई है, इसलिए

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$

इसी प्रकार F_1 और F_2 में विटामिन B की इकाइयों की संख्या यह होगी

$$3x_1 + 2x_2.$$

क्योंकि विटामिन B की दैनिक निम्नतम आवश्यकता 50 इकाई की है, इसलिए

$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$

और, क्योंकि एक इकाई F_1 और F_2 की कीमत क्रमशः 3रु० और 2.50रु० है, इसलिए कुल खर्चा यह होगा

$$Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

क्योंकि x_1 और x_2 की ऋणात्मक खरीद निरर्थक है, इसलिए हमें यह प्राप्त होगा ।

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

इस तरह, समस्या यह हो जाती है ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ x_1 और x_2 ज्ञात कीजिए, जिससे कि

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

और जिसके लिए उद्देश्य फलन

$$Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

न्यूनतम होगा ।

IV. निरीक्षक समस्या (An Inspection Problem)

उदाहरण 4 : एक कंपनी में दो ग्रेड के इन्स्पेक्टर हैं - इन्स्पेक्टर I और इन्स्पेक्टर II - जिन्हें गुणता नियंत्रण की जाँच करने का काम करना होता है । उन्हें प्रतिदिन 8 घंटे में 2200 वस्तुओं की जांच करनी होती है । ग्रेड I वाले इन्स्पेक्टर एक घंटे में 25 वस्तुओं की जांच कर सकते हैं जबकि ग्रेड II वाले इन्स्पेक्टर एक घंटे में 15 वस्तुओं की जांच कर सकते हैं । ग्रेड I वाले इन्स्पेक्टर का मजदूरी दर प्रति घंटा 4रु० है जबकि ग्रेड II वाले इन्स्पेक्टर का मजदूरी दर प्रति घंटा 3रु० है । जांच का काम करने के लिए कंपनी में ग्रेड I वाले 8 इन्स्पेक्टर हैं और ग्रेड II वाले 10 इन्स्पेक्टर हैं । यह कम्पनी इस तरह इन्स्पेक्टरों की इष्टतम (उपयुक्त) नियुक्ति करना चाहती है जिससे कि जाँच में होने वाले खर्च को न्यूनतम किया जा सके ।

हल : मानलीजिए Z, जांच में होने वाला कुल खर्च है ।

मानलीजिए x_1 और x_2 जांच के काम पर लगाए गए ग्रेड I और ग्रेड II वाले इन्स्पेक्टरों की संख्या है । क्योंकि प्रत्येक ग्रेड में उपलब्ध इन्स्पेक्टरों की संख्या सीमित है, इसलिए यहाँ निम्नलिखित अवरोध होते हैं :

$$x_1 \le 8 \text{ (ग्रेड I)}$$

$$x_2 \le 10 \text{ (ग्रेड II)}$$

क्योंकि कंपनी चाहती है कि प्रतिदिन कम से कम 1000 वस्तुओं की जांच अवश्य की जाए, इसलिए,

$$(8 \times 25)\, x_1 + (8 \times 15)\, x_2 \le 2200$$

अर्थात् $$200x_1 + 120x_2 \ge 2200$$

अर्थात् $$5x_1 + 3x_2 \ge 55.$$

क्योंकि ग्रेड I और ग्रेड II के इन्स्पेक्टरों को एक घंटे की जांच के लिए क्रमश: 4रु॰ और 3रु॰ देना होता है, इसलिए कुल खर्च $= (4x_1 + 3x_2) \times 8.$

अर्थात् $$Z = 32x_1 + 24x_2.$$

यहां हमारा उद्देश्य जांच पर होने वाले कुल खर्चे का न्यूनतमीकरण करना है ।

इस तरह, रैखिक प्रोग्रामन समस्या यह हो जाती है

$$Z = 32x_1 + 24x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि व्यवरोध ये हों

$$x_1 \le 8$$

$$x_2 \le 10$$

$$5x_1 + 3x_2 \ge 55$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

प्रश्न 3 : एक कम्पनी तीन वस्तुओं A, B और C का मिश्रण बनाना चाहती है । A, B और C की लागत क्रमश: 5रु॰, 4रु॰ और 3रु॰ है । उपभोक्ताओं की मांग की पूर्ति के लिए कंपनी निम्नलिखित विधि से मिश्रण तैयार करती है : (i) मिश्रण में A की मात्रा 200 kg से अधिक नहीं रखी जा सकती है, (ii) B की मात्रा कम से कम 300 kg होनी चाहिए, (ii) C की मात्रा 400 kg से अधिक नहीं रखी जा सकती । 1000 kg मिश्रण में इन तीन वस्तुओं का इष्टतम (उपयुक्त) संयोजन मालूम कीजिए जिससे कि कुल खर्च न्यूनतम हो । एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में इसका संरूपण कीजिए ।

प्रश्न 4 : अहमदाबाद डेयरी निगम का प्रबंधक दो प्रकार के पोषण पदार्थ का एक सही मिश्रण प्राप्त करने का प्रयास कर रहा है । दोनों ही पदार्थों में अलग-अलग प्रतिशत अनुपातों में चार आवश्यक रचक (ingredients) हैं जिनका ब्यौरा नीचे की सारणी में दिया गया है । मिश्रण पर होने वाला न्यूनतम खर्च मालूम कीजिए ।

रचक	% प्रति किलोग्राम पदार्थ		न्यूनतम आवश्यकता
	पदार्थ 1	पदार्थ 2	(kg में)
1	80	40	8
2	20	60	4
3	40	80	6
4	60	20	12
खर्च	10.00	7.50	

रैखिक प्रोग्रामन निदर्श का संरक्षण कीजिए।

3.3 हल विधि (Method of Solution)

भाग 3.2 में हमने रैखिक प्रोग्रामन समस्या के संरक्षण पर चर्चा की है। इस भाग में हम इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या ~~के हल~~ करने की विधि पर चर्चा करेंगे। इकाई 2 में बतायी गई असमिकाओं की ग्राफ विधि को लागू करके हम रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की एक ग्राफीय विधि पर चर्चा करेंगे।

3.3.1 ग्राफीय विधि (Graphical Method)

इस विधि को समझने के लिए यहाँ हम उदाहरण 1 में दिए गए उत्पाद-मिश्रण समस्या ले रहे हैं। समस्या ऐसे x_1, x_2 ज्ञात करने की है जो

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कर दे जबकि व्यवरोध ये हों

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

अब हम कार्तीय समतल (Cartesian Plane) में x_1-अक्ष पर और x_2-अक्ष से निरूपित क्षैतिज अक्ष और ऊर्ध्वाधर अक्ष खींचकर ग्राफ बनाएंगे। क्योंकि कोई भी विन्दु जो प्रतिबंध $x_1 \geq 0$ और $x_2 \geq 0$ को संतुष्ट करता है। केवल **प्रथम चतुर्थांश** (First Quadrant), में स्थित होता है, इसलिए अपेक्षित युग्म (x_1, x_2) का पता लगाने का काम केवल प्रथम चतुर्थांश के विन्दुओं तक ही सीमित रह जाता है। असमिकाओं

$$3x_1 + 3x_2 \leq 12$$

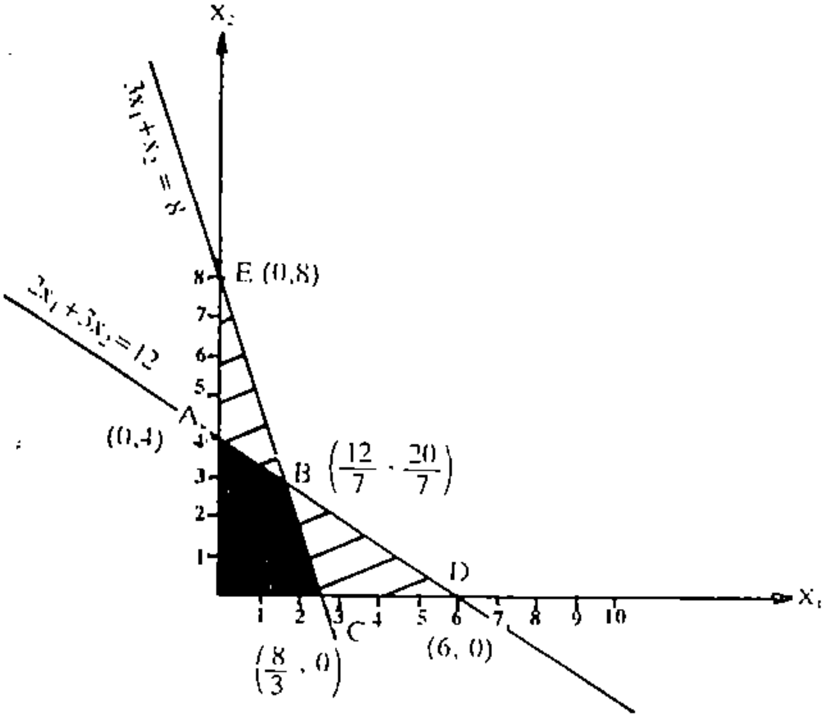
$$3x_1 + x_2 \leq 8.$$

का ग्राफ खींचिए जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \text{ और } 2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

को संतुष्ट करने वाले विन्दु-समुच्चय को x_1-अक्ष से ऊपर और x_2-अक्ष दायीं ओर के छायादार क्षेत्र से अर्थात् त्रिभुज AOD से निरूपित किया गया है। इसी प्रकार,

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \text{ और } 3x_1 + x_2 \leq 8.$$



चित्र 1

को संतुष्ट करने वाले विन्दु समुच्चय को त्रिभुज COE के छायादार क्षेत्र से निरूपित किया गया है ! **सुसंगत प्रदेश** (Feasible Region) या हल समष्टि (समुच्चय) (Solution Space/ Set) ग्राफ का वह क्षेत्र होती है जिसमें सभी व्यवरोधों को संतुष्ट करने वाले सभी मान-युग्म (Pair of Values) होते हैं । यहाँ पर सुसंगत प्रदेश दो अक्षों और रेखाओं

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \text{ और } 3x_1 + x_2 \leq 8.$$

से परिबद्ध होगा और यह ग्राफ का सर्वनिष्ठ छायादार भाग होगा यहाँ सर्वनिष्ठ भाग को OABC से निरूपित किया गया है । इस वहुभुज के चार कोने या चरम विन्दु में हैं

$$O\,(0, 0),\ A\,(0, 4),\ B\left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right),\ C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

इसलिए, इन कोने के चार विन्दुओं पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात कीजिए । खंड 2 में आप यह देखेंगे कि इष्टतम हल सुसंगत प्रदेश के एक चरम विन्दु (extreme point) पर स्थित होगा

चरम विन्दु	उद्देश्य फलन का मान
	$Z = 4x_1 + 5x_2$
$O\,(0, 0)$	$Z = 0$
$A\,(0, 4)$	$Z = 20$
$B\left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$	$Z = \frac{148}{7}$
$C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$	$Z = \frac{32}{3}$

यहाँ हम देखते हैं कि Z का अधिकतम मान विन्दु

$$B\left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

पर है और अधिकतम मान यह है

$$Z = \frac{148}{7}$$

इसलिए

$$x_1 = \frac{2}{7}, \; x_2 = \frac{20}{7}$$

अत: उत्पाद A का दैनिक उत्पादन $\frac{12}{7}$ है और उत्पाद B का दैनिक उत्पादन $\frac{20}{7}$ है । और, अधिकतम लाभ $\frac{148}{7}$ रु० का है ।

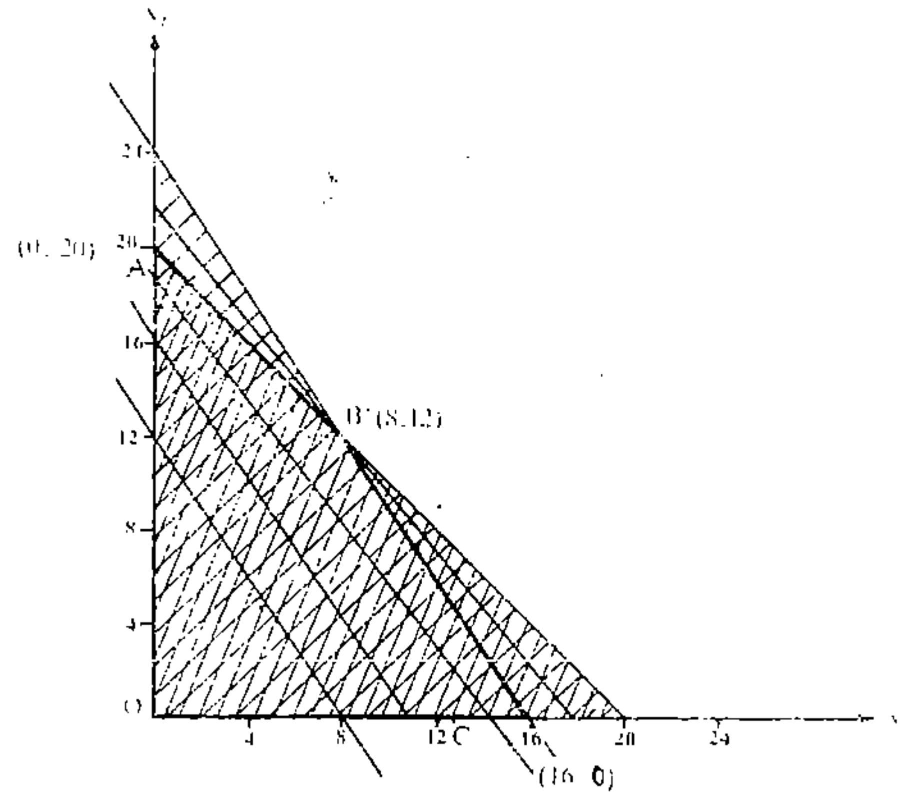
आइए अब हम उदाहरण 2 में दी गई निवेश समस्या को लें ।

$$Z = 22x_1 + 18x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि प्रतिबंध ये हों

$$360x_1 + 240x_2 \le 5760$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

आइए पहले हम व्यवरोध असमिकाओं (Constraint Inequalities) का ग्राफ खींचे, जैसा कि चित्र 2 में दिखाया गया है ।



चित्र 2

सुसंगत प्रदेश अवमुख बहुफलन OABC हैं । चरम बिन्दु O (0, 0), A (0, 20), B (8, 12) C (16, 0) हैं । Z का इष्टतम मान इस प्रकार निर्धारित होता है

चरम बिन्दु	उद्देश्य फलन का मान $Z = 22x_1 + 18x_2$
O (0, 0)	$Z = 0$
A (0, 20)	$Z = 360$
B (8, 12)	$Z = 392$
C (16, 0)	$Z = 352$

Z का अधिकतम मान 392 है, जो कि बिन्दु B (8, 12) पर है । इसलिए दुकानदार को चाहिए कि वह अपना पैसा 8 पंखों और 12 सिलाई की मशीनों को खरीदने में लगाए जिससे कि उसे 392 रु० का अधिकतम लाभ हो सके ।

अलग-अलग चरम बिन्दुओं पर Z का मान मालूम करने और फिर अधिकतम मान ज्ञात करने के स्थान पर **इष्टतम बिन्दु** (Optimal Point) ज्ञात करने की एक अन्य विधि भी है । इसका संकेत उद्देश्य फलन, अर्थात् व्यंजक

$$22x_1 + 18x_2$$

से प्राप्त हो जाता है जो कि रैखिक भी है और जिसे ग्राफ पर एक रेखा के रूप में आलेखित किया जा सकता है -

समीकरण

$$22x_1 + 18x_2 = p$$

लीजिए, जहाँ p **स्वेच्छ लाभ** (Arbitrary Profit) को प्रकट करता है । p को अलग-अलग देने पर, समीकरण

$$22x_1 + 18x_2 = p$$

एक **रेखा-कुल** (Family of Lines) को निरूपित करता है जो कि p के मान पर निर्भर करता है और इस कुल की सभी रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर होंगी । यदि हम p = 198 लें, तो समीकरण

$$22x_1 + 18x_2 = 198$$

एक रेखा को निरूपित करता है । इस रेखा का ग्राफ खींचिए । यदि p = 288, तब

$$22x_1 + 18x_2 = 288$$

इस रेखा को खींचिए । ये दो रेखाएँ समांतर रेखाएँ हैं । p के किसी अन्य मान पर भी उद्देश्य फलन की रेखा इन रेखाओं के समांतर होंगी । जो रेखा मूल बिन्दु के निकट होती है, वह लाभ गिरते हुए मान को प्रकट करती है और मूल बिन्दु से दूर स्थित रेखा लाभ के बढ़ते हुए मान को प्रकट करती है । हम इन रेखाओं के समान्तर तब तक रेखाएं खींचते जाते हैं जब तक हम सुसंगत प्रदेश के एक चरम (उच्चतम) बिन्दु तक नहीं पहुँच जाते । चरम मान (Extremum) या तो एक बिन्दु हो सकता है या एक सरल रेखा । यदि यह एक कोने का बिन्दु (चरम बिन्दु) है, तो इससे हमें **इष्टतम हल** (Optimal Solution) प्राप्त होता है । और, यदि यह एक सरल रेखा है, तो इससे हमें परिमित संख्या में इष्टतम हल प्राप्त होते हैं । इस स्थिति पर हम बाद में चर्चा करेंगे ।

इस उदाहरण में, क्योंकि इष्टतम रेखा बिन्दु B (8, 12) से होकर जाती है, इसलिए बिन्दु B (8, 12) पर Z का अधिकतम मान प्राप्त होता है ।

आइए अब हम न्यूनतमीकरण समस्या अर्थात् उदाहरण 3 में दी गई आहार समस्या को लें ।

$$Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

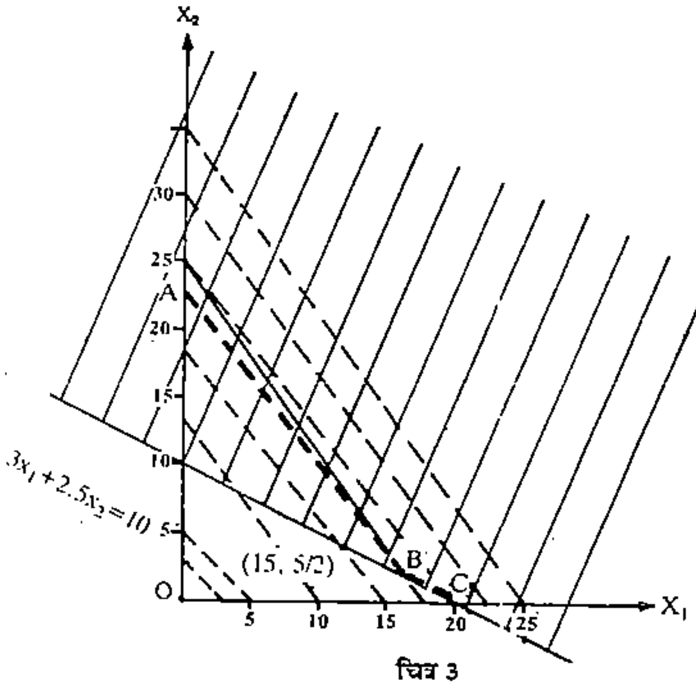
का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \quad \geq 0$$

व्यवरोध असमिकाओं के ग्राफ को चित्र 3 में दिखाया गया है ।



चित्र 3

क्योंकि प्रत्येक व्यवरोध, हर प्रकार से बड़ा या इसके बराबर होता है, इसलिए इनमें सभी को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं से एक प्रदेश प्राप्त होगा जो कि इन सरल रेखाओं में से प्रत्येक सरल रेखा की दायीं ओर स्थित होता है ।

यहां सुसंगत प्रदेश विवृत (open) हैं जिसके शीर्ष बिन्दु A, B और C हैं अर्थात्

A (0, 25), B (15, 5/2) और C (20, 0)

ध्यान दीजिए कि (0, 0), सुसंगत प्रदेश का एक बिन्दु नहीं है ।

चरम बिन्दु	$Z = 3x_1 + 2.5x_2$ का मान
A (0, 25)	$Z = 62.5$
B (15, 5/2)	$Z = 51.25$
C (20, 0)	$Z = 60$

बिन्दु B (15, 5/2) पर Z मान न्यूनतम मान है ।

आइए अब हम उद्देश्य फलन की रेखाएँ खींचकर न्यूनतम मान ज्ञात करें ।

इसके लिए रेखाएँ

$3x_1 + 2.5x_2 = 10$ और $3x_1 + 2.5x_2 = 15$ लीजिए ।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि Z का न्यूनतम मान उस रेखा के संगत होता है जो B से होकर जाता है। इसलिए Z का न्यूनतम मान = 5125 अत: आहार में खाद्य पदार्थ F_1 की 15 इकाई और खाद्य पदार्थ F_2 की 25 इकाई होती है।

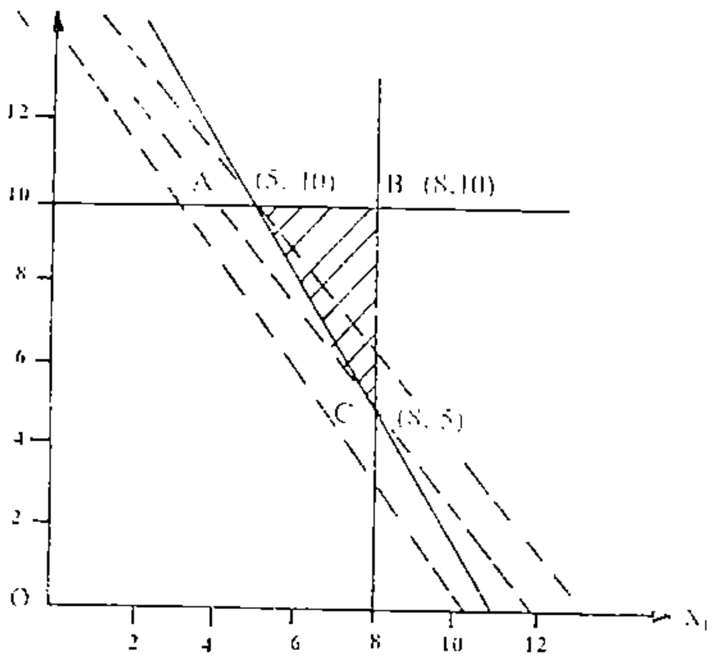
आइए अब हम उदाहरण 4 में दी गई निरीक्षण समस्या का ग्राफ खींचे।

$$Z = 32x_1 + 24x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 55 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

इस ग्राफ को चित्र 4 में दिखाया गया है।



चित्र 4

सुसंगत प्रदेश Δ ABC हैं, जहाँ A (5, 10), B (8, 10) और C (18, 5) चरम बिन्दु हैं। उद्देश्य फलन यह है

$$Z = 32x_1 + 24x_2$$

उद्देश्य फलन की रेखाओं

$$32x_1 + 24x_2 = 400 \text{ और } 32x_1 + 24x_2 = 336$$

को और इनके समांतर रेखाओं को लीजिए। यहाँ हम यह पाते हैं कि Z के न्यूनतम मान की संगत रेखा बिन्दु C से होकर जाती है। इसलिए बिन्दु C(8, 5) पर Z का न्यूनतम मान प्राप्त होता है और Z का न्यूनतम मान = 376. चरम बिन्दुओं पर Z का मान परिकलित करके हम इसे सत्यापित कर सकते हैं

चरम बिन्दु	Z का मान = $32x_1 + 24x_2$
A (5, 10)	Z = 400
B (8, 10)	Z = 496
C (8, 5)	Z = 376

इसलिए प्रबंध को चाहिए कि वह ग्रेड I वाले 8 इन्सपेक्टरों और ग्रेड II वाले 5 इन्सपेक्टरों को रखें ।

अब आप ग्राफीय विधि से नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करें ।

प्रश्न 5 : Z = x + 3y का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों :

$$3x + 6y \le 8$$

$$5x + 2y \le 10$$

$$x, y \ge 0$$

प्रश्न 6 : (i) Z = 20x + 10y का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x + 2y \le 40$$
$$3x + y \ge 30$$
$$4x + 3y \ge 60$$
$$x, y \ge 0$$

(ii) Z = –x + 2y का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$-x + 3y \le 10$$
$$x + y \le 6$$
$$x - y \le 2$$
$$x, y \ge 0$$

3.3.2 परिबद्ध समुच्चय (Bounded Set) और अपरिबद्ध समुच्चय (Unbounded Set) की विधि

आप परिबद्ध समुच्चय की अभिधारणा से अच्छी तरह से परिचित हैं । आप जानते हैं कि समुच्चय S को परिबद्ध समुच्चय तब कहा जाता है जबकि ऐसी संख्याएँ k और K हों, जिससे कि

$$k \le x \le K, \forall x \in S.$$

संख्याओं k और K को क्रमशः **निम्न परिबद्ध** (Lower Bounded) और उपरि परिबद्ध (Upper Bounded) कहा जाता है । यह भी संभव है कि समुच्चय S में केवल k ही हो । तब इस स्थिति में हम यह कहते हैं कि S केवल **निम्नतः परिबद्ध** (Bounded Below) है और यह एक परिबद्ध समुच्चय नहीं होता । इसी प्रकार, जब समुच्चय S का केवल उपरि परिबंध k होता है, तब हम कहते हैं कि **समुच्चय S केवल उपरितः परिबद्ध** (Bounded Above) हैं और यह भी एक अपरिबद्ध **समुच्चय होता है** । कुछ ऐसे भी समुच्चय होते हैं जिनका न तो कोई निम्न परिबद्ध होता है और न हि कोई उपरि परिबंध । उन समुच्चयों को जो केवल निम्नतः परिबद्ध

होते हैं, केवल उपरित: परिबद्ध होते हैं, या न तो निम्नत: परिबद्ध होते हैं और न हि उपरित: परिबद्ध होते हैं, उन्हें **अपरिबद्ध समुच्चय** (Unbounded Sets) कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, उन समुच्चयों को परिबद्ध समुच्चय कहा जाता है जो कि किसी भी रूप में परिबद्ध न हों।

ज्यामिति की भाषा में किसी समुच्चय को तब परिबद्ध समुच्चय कहा जाता है जबकि उसके प्रदेश को वृत्त या त्रिभुज जैसे किसी वक्र से परिबद्ध किया जा सकता हो। किसी समुच्चय को तब अपरिबद्ध कहा जाता है जबकि उसके प्रदेश को परिबद्ध न किया जा सकता हो। पीछे दिए गए उदाहरणों में से प्रत्येक उदाहरण में आपने एक सुसंगत प्रदेश प्राप्त किया है। प्रत्येक स्थिति में यह सुसंगत प्रदेश एक **अवमुख समुच्चय** (Convex Set) को निरूपित करता है। (इकाई 2 में दी गई अवमुख समुच्चय की परिभाषा को फिर से याद कीजिए।) अवमुख समुच्चय परिबद्ध या अपरिबद्ध हो सकता है।

उदाहरण 1 और 2 में दी गई समस्याओं के ग्राफ देखिए। अवमुख बहुफलक OABC परिबद्ध है। उदाहरण 3 का सुसंगत प्रदेश परिबद्ध नहीं है अर्थात अपरिबद्ध (Unbounded) है, क्योंकि x_1 और x_2 दोनों ही अनंत तक जा सकते हैं। क्योंकि समस्या न्यूनतमीकरण करने की है, इसलिए Z का न्यूनतम मान तो होता है, पर $\max Z \to \infty$. उदाहरण 4 का सुसंगत समुच्चय त्रिभुज ABC है और यह परिबद्ध हैं।

अब एक ऐसा उदाहरण लीजिए, जहाँ सुसंगत प्रदेश अपरिबद्ध हो और अधिकतम Z अनंत हो।

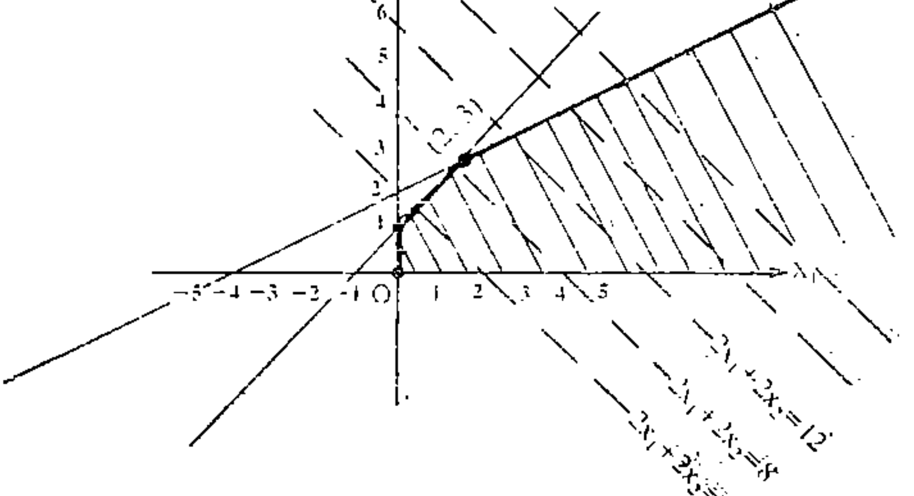
उदाहरण 5 : $Z = 2x_1 + 2x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x_1 - x_2 \geq -1$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

हल : पहले व्यवरोध को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

इन व्यवरोधों के ग्राफ को चित्र 5 में दिखाया गया है।



चित्र 5

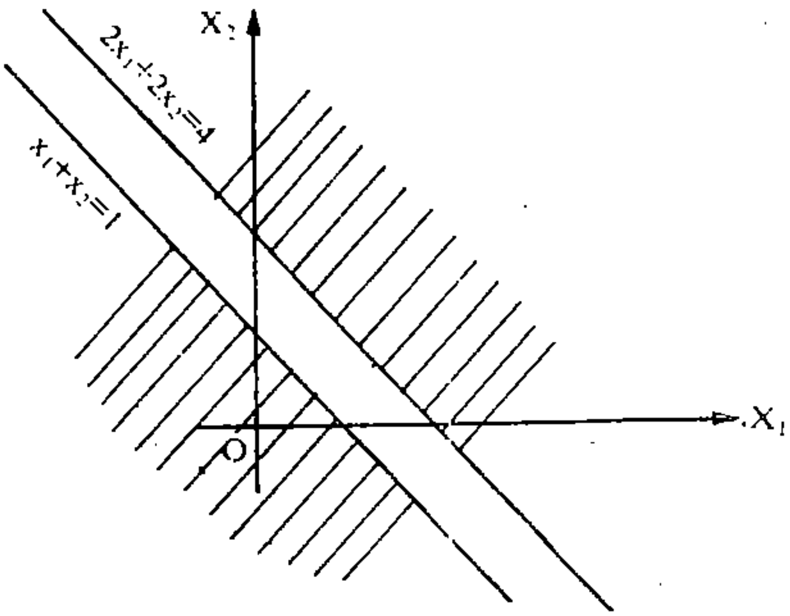
छायादार भाग सुसंगत प्रदेश है और अपरिबद्ध है । चरम बिन्दु (0, 0), (0, 1), (2, 3) हैं । इन बिन्दुओं पर Z का मान परिमित है । क्योंकि x_1 और x_2 दोनों ही अनंत की ओर प्रवृत्त हो सकते हैं, इसलिए Z का मान अनंत की ओर प्रवृत्त होता है । इस स्थिति में तब हम कहते हैं कि दी हुई समस्या अपरिबद्ध है । उद्देश्य फलन की रेखाओं से यह पता चलता है कि $Z \to \infty$.

रैखिक प्रोग्रामन समस्या की और विशेष स्थिति होती है जबकि इसका कोई सुसंगत प्रदेश न हो । ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि दी हुई समस्या असंगत (Infeasible) है । इसे हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे :

उदाहरण 6 : $Z = 3x_1 - 2x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

हल : चित्र 6 में इसका ग्राफ दिया गया है



चित्र 6

ग्राफ में आप यह देख सकते हैं कि ऐसा कोई बिन्दु (x_1, x_2) नहीं है जो दोनों ही व्यवरोधों को संतुष्ट करता हो । इसमें दो व्यवरोध असंगत हैं । और, क्योंकि यहाँ कोई भी सुसंगत प्रदेश नहीं है इसलिए दी हुई समस्या असंगत है ।

एक और उदाहरण लीजिए जहाँ व्यवरोध तो संगत है पर समस्या असंगत है ।

उदाहरण 7 : $Z = 3x_1 - 2x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x_1 + x_2 \ge 0$$

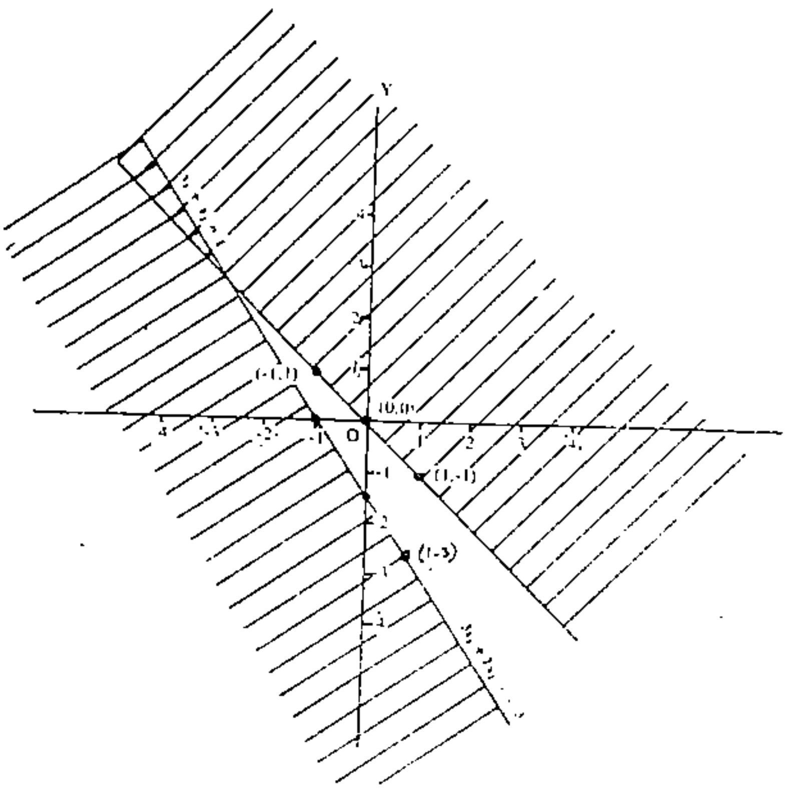
$$3x_1 - 2x_2 \leq -3.$$
$$x_1, x_2 \quad \geq 0.$$

हल : इस स्थिति में एक ऐसा प्रदेश है, जिसे कि चित्र 7 में दिखाया गया है जो व्यवरोधों को संतुष्ट तो करता है पर **ऋणोत्तर प्रतिबंधों** (Non-negative Restrictions)

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

को संतुष्ट नहीं करता ।

अत: यहाँ कोई भी सुसंगत प्रदेश नहीं है और दी हुई समस्या असंगत है ।



चित्र 7

प्रश्न 7 : $Z = 10x_1 + 15x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x_1 \quad \geq 5,$$
$$x_2 \quad \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \quad \geq 0.$$

3.3.3 वैकल्पिक इष्टतम (Alternative Optimum)

एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक से अधिक इष्टतम हल हो सकता है । यह तब होता है

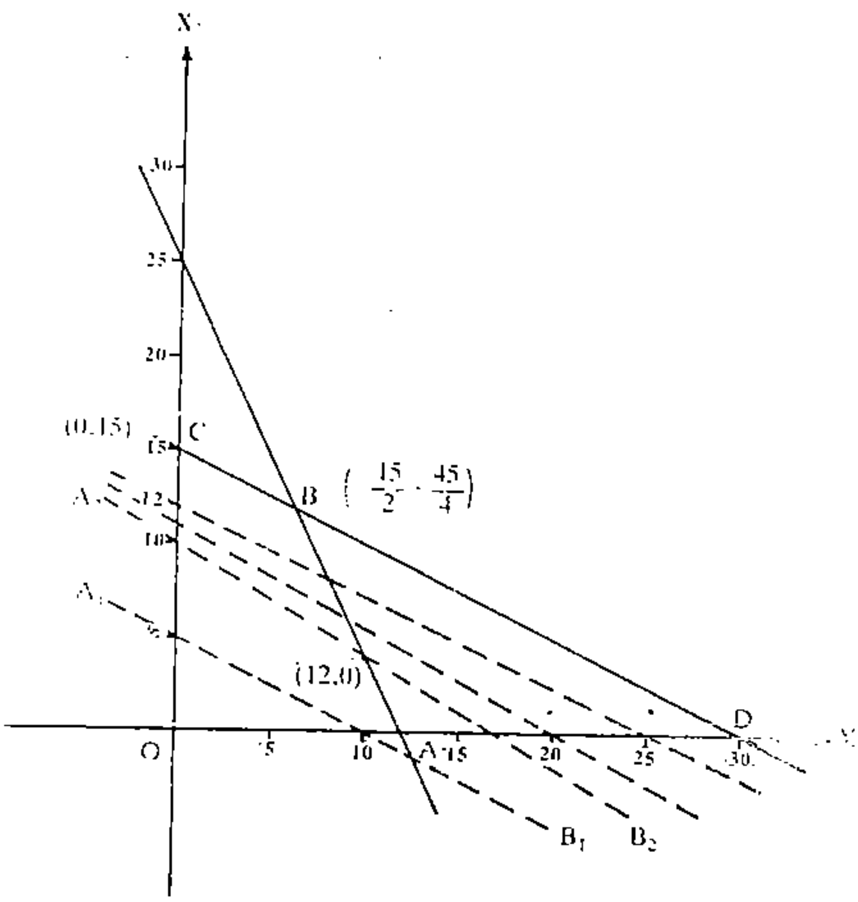
जबकि उद्देश्य फलन की रेखा बंधन व्यवरोध (अर्थात् वह व्यवरोध जो समता के अर्थ में इष्टतम हल से संतुष्ट हो जाता हो) के समांतर हो। हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इसे अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 8 : $Z = 15x + 30y$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$2x + 4y \le 60$$
$$5x + 2y \le 60$$
$$x, y \ge 0.$$

हल : चित्र 8 में इसका ग्राफ दिया गया है।



चित्र 8

छायादार क्षेत्र OABC सुसंगत हल समुच्चय को प्रकट करता है।

सुसंगत प्रदेश में उस बिन्दु का स्थान-निर्धारण करने के संबंध में, जो उद्देश्य फलन का अधिकतमीकरण कर देता है, हम यह पाते हैं कि 150रु० के लाभ के लिए, उद्देश्य फलन को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$15x + 30y = 150$$

रेखा A, B है। अब Z का एक बड़ा मान, मानलीजिए 300, लेकर इसे हल कीजिए अर्थात् $15x + 30y = 300$ को लीजिए। रेखा A_2 B_2 है। रेखाएँ A_1 B_1 और A_2 B_2 दोनों ही सुसंगत प्रदेश के अंदर हैं। Z का मान बढ़ाने और अलग-अलग रेखाएँ खींचने पर हम यह पाते हैं कि अंतत: उद्देश्य फलन की रेखा, रेखा CB के साथ संपाती होती है। अत: सुसंगत प्रदेश के रेखा-खंड CB के प्रत्येक बिन्दु से Z का इष्टतम मान प्राप्त होता है। CB के चरम बिन्दु

$$C(0, 15) \text{ और } B\left(\frac{15}{2}, \frac{45}{4}\right)$$

है और (0, 15) पर Z का मान

$$= 15.0 + 30.15 = 450$$

और, $\left(\frac{15}{2}, \frac{45}{4}\right)$ पर Z का मान

$$= 15 \cdot \frac{15}{2} + 30 \quad \frac{45}{5} = 450$$

अर्थात् दोनों ही चरम बिन्दुओं पर Z का अधिकतम मान समान अर्थात् 450 है। यदि हम C और B को मिलाने वाले रेखा-खंड पर कोई बिन्दु लें, तो उस बिन्दु पर भी Z का मान समान होगा।

चरम बिन्दुओं को लेकर भी आप यह दिखा सकते हैं कि Z का इष्टतम मान 450 है।

चरम बिन्दु	$Z = 15x + 30y$ का मान
O (0, 0)	$Z = 0$
A (12, 0)	$Z = 180$
$B = \left(\frac{15}{2}, \frac{45}{2}\right)$	$Z = 450$
C (0, 15)	$Z = 450$

दोनों बिन्दुओं (0, 15) और $\left(\frac{15}{2}, \frac{45}{2}\right)$ पर Z का अधिकतम मान = 450.

प्रश्न 8 : $Z = 2x + 2y$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x + y \leq 4$$
$$x + 2y \leq 5$$
$$x \leq 3$$
$$x, y \geq 0.$$

3.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है

1. अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण दोनों ही प्रकार को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ का गणितीय संरूपण
2. प्रश्न हल करने की ग्राफीय विधि
3. उद्देश्य फलन की रेखा के समानतर रेखा खींचकर या चरम बिन्दुओं की जांच करके इष्टतम हल को पढ़ने की विधि
4. अलग-अलग स्थितियाँ, जबकि $Z \to \infty$, कोई सुसंगत हल न हो और जबकि अनंत इष्टतम हल हों।

3.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

प्रश्न 1) $Z = 20x_1 + 30x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$3x_1 + 3x_2 \leq 36$

$5x_1 + 2x_2 \leq 50$

$2x_1 + 6x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0.$

प्रश्न 2) $Z = 80x_1 + 120x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 2$

$x_2 \geq 3$

$20\,x_1 + 50\,x_2 \leq 360$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

प्रश्न 3) $Z = 5x_1 + 40x_2 + 3x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$x_1 \leq 200$

$x_2 \geq 300$

$x_3 \leq 400$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

प्रश्न 4) $Z = 10x_1 + 7.5x_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$\frac{18}{10} x_1 + \frac{4}{10} x_2 \geq 4$

$\frac{2}{10} x_1 + \frac{6}{10} x_2 \geq 6$

$\frac{6}{10} x_1 + \frac{2}{10} x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

प्रश्न 5) अधिकतम $Z = 4$

$x = 0, y = \frac{4}{3}$

प्रश्न 6) (i) Z का अधिकतम मान $= 240$

$x = 6, y = 12$

(ii) न्यूनतम $Z = -2$

$x = 2, y = 0$

प्रश्न 7) $Z = 100, x_1 = 10, x_2 = 0.$

प्रश्न 8) बहु-हल (Multiple Solution)

चरम विन्दु हल (2, 2) और (3, 1) हैं

Z का अधिकतम मान = 8.

3.6 शब्दावली

अधिकतमीकरण	maximization
अपरिबद्ध	unbounded
असंगत	infeasible
इष्टतम	optimum
इष्टतमीकरण	optimization
उद्देश्य फलन	objective function
गणितीय संरचना	mathematical formulation
चरम विन्दु	extreme point
न्यूनतमीकरण	minimization
परिबद्ध	bounded
रैखिक प्रोग्रामन	linear programming
वैकल्पिक इष्टतम	alternative optimum
व्यवरोध	constraint
संरूपण	formulation
सुसंगत प्रदेश	feasible region

इकाई 4 दो से अधिक चरों में इष्टतमीकरण (Optimization in More than Two Variables)

इकाई की रूपरेखा (Structure of the Unit)

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 3 में हमने आपको दो चरों में इष्टतमीकरण की प्रक्रिया से परिचित कराया है । वहाँ हमने कुछ उदाहरण लेकर दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या के गणितीय संरूपण की व्याख्या की है । उस इकाई में आपने दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि का भी अध्ययन किया है । इस इकाई में हम रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि को दो से अधिक चरों वाली समस्या में लागू करेंगे और फिर इन्हीं विधियों को तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने में भी लागू करेंगे । इससे हमें यह पता चल जाएगा कि तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में ग्राफीय विधि को लागू किया जा सकता है या नहीं । और तब हमारे लिए यह आवश्यक हो जाता है कि खंड 3 में हम एक और अधिक वैज्ञानिक बीजीय विधि पर चर्चा करें ।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- तीन चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण कर सकेंगे
- तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण कर सकेंगे और इस तरह व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या की व्याख्या कर सकेंगे
- तीन चरों वाली समस्या को ग्राफीय विधि से हल कर सकेंगे और तीन से अधिक चरों वाली समस्या को हल करने में ग्राफीय विधि की सीमाओं को जान सकेंगे ।

4.2 तीन चरों में गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation in Three Variables)

इकाई 2 में हमने वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ समस्याओं को लेकर दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के गणितीय संरूपण पर चर्चा की है । ठीक उसी प्रकार, इस इकाई में हम वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ समस्याओं को लेकर तीन चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या पर चर्चा करेंगे ।

4.2.1 अधिकतमीकरण समस्या (Maximization Problems)

हम नीचे दिए उदाहरण की सहायता से रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण करेंगे ।

उदाहरण 1 : एक छोटा उद्योगपति इस्पात और पीतल से मशीन के तीन प्रकार के पुर्जे बनाता है । प्रत्येक पुर्जे के लिए आवश्यक इस्पात और पीतल की मात्रा और प्रत्येक पुर्जे की एक इकाई को तैयार करने और जोड़ने के लिए आवश्यक मजदूरी के मानव-सप्ताहों की संख्या निम्नलिखित है ।

	M_1	M_2	M_3	उपलब्धता
इस्पात	6	5	3	100 कि.ग्रा.
पीतल	3	4	9	75 कि.ग्रा.
मानव सप्ताह	1	2	1	20 सप्ताह

यहाँ मजदूरों की संख्या 20 मानव-सप्ताह तक सीमित है, इस्पात प्रति सप्ताह 100 कि.ग्रा. तक सीमित है और पीतल प्रति सप्ताह 75 कि.ग्रा. तक सीमित है । M_1, M_2 और M_3 की प्रत्येक इकाई पर उद्योगपति को क्रमशः 6 रु०, 4 रु० और 7 रु० का लाभ होता है । एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में इसका ऐसा गणितीय संरूपण कीजिए जिससे कि कुल लाभ अधिकतम हो जाए ।

हल : मानलीजिए $x_j, j = 1, 2, 3$ प्रति सप्ताह बनाए गए पुर्जों M_j की इकाइयों की संख्या है । हम x_1, x_2, x_3 के ऐसे मान ज्ञात करना चाहते हैं जो कि कुल लाभ को अधिकतम कर दे । क्योंकि इस्पात की मात्रा, पीतल की मात्रा और मजदूरों की संख्या सीमित है, इसलिए हम स्वेच्छया से किसी भी पुर्जे के उत्पादन में वृद्धि नहीं ला सकते ।

आइए पहले हम इस्पात की उपलब्धता के संबंध में लगाए गए प्रतिबंध को लें । हर सप्ताह इस्तेमाल किए गए इस्पात की मात्रा

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

होगी, क्योंकि हर सप्ताह पुर्जे M_1 की प्रत्येक इकाई के लिए 6 कि.ग्रा. इस्पात की आवश्यकता होती है, पुर्जे M_2 की प्रत्येक इकाई के लिए 5 कि.ग्रा. इस्पात की आवश्यकता होती है और पुर्जे M_3 की प्रत्येक इकाई के लिए 3 कि.ग्रा. इस्पात की आवश्यकता होती है ।

क्योंकि उपलब्ध इस्पात की कुल मात्रा 100 कि.ग्रा. से अधिक नहीं है, इसलिए

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 100$$

इसी प्रकार पीतल के संबंध में हम यह प्राप्त कर सकते हैं

$$3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le 75$$

और क्योंकि मजदूरों की संख्या 20 मानव-सप्ताह तक सीमित है, इसलिए यहाँ हमें यह प्राप्त होगा

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20.$$

क्योंकि हम ऋण मात्राएँ उत्पन्न नहीं कर सकते, इसलिए या तो किसी घटक की धनात्मक मात्रा होगी या कोई भी मात्रा नहीं होगी । इस तरह अतिरिक्त प्रतिबंधों

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

में यह अपेक्षित है कि **चर ऋणेत्तर** (Non-negative) संबंधी हों । यदि पुर्जे M_j की x_j इकाइयाँ उत्पादित की गई हों, तो साप्ताहिक लाभ Z यह होता है

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

हम चरों के वे मान ज्ञात करना चाहते हैं जो सभी व्यवरोधों तथा ऋणेत्तर संबंधी प्रतिबंधों को संतुष्ट करेगा और Z का अधिकतमीकरण करेगा । इस तरह, रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय संरूपण यह होगा :

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 &\le 75 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

अब आप इसी प्रकार नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए :

प्रश्न 1 : हाथ से बने फर्नीचर की वार्षिक "प्रदर्शनी और विक्री" अगले माह में होने वाली है और व्यावसायिक अध्ययन स्कूल विक्री के लिए फर्नीचर बनाने की योजना बना रहा है । स्कूल में लकड़ी का काम करने की तीन कक्षाएं- अर्थात् I वर्ष, II वर्ष और III वर्ष हैं और ये विक्री के लिए तीन प्रकार की कुर्सी A, B और C बनाना चाहते हैं । प्रत्येक कक्षा में प्रत्येक कुर्सी को बनाने का काम मिलता है और प्रत्येक कक्षा में प्रत्येक कुर्सी को बनाने का समय (घंटों में) नीचे दिया गया है :

कुर्सी	I वर्ष	II वर्ष	III वर्ष
A	2	4	3
B	3	3	2
C	2	1	4

कुर्सी बनाने के लिए अगले माह I वर्ष की कक्षा को 120 घंटे उपलब्ध होंगे, II वर्ष की कक्षा को 160 घंटे उपलब्ध होंगे और III वर्ष की कक्षा को 100 घंटे उपलब्ध होंगे । लकड़ी का काम करने वाले कक्षाओं के शिक्षक का यह विचार है कि प्रदर्शनी में अधिक से अधिक 40 कुर्सी बेची जा सकती हैं । शिक्षक ने प्रत्येक प्रकार की कुर्सी पर होने वाला लाभ ज्ञात किया है: A प्रकार की कुर्सी पर 40 रु॰, B प्रकार की कुर्सी पर 35 रु॰ और C प्रकार की कुर्सी पर 30 रु॰ ।

"प्रदर्शनी और विक्री" कार्यक्रम में अधिक से अधिक लाभ प्राप्त करने के लिए प्रत्येक प्रकार की कितनी कुर्सी बनाई जाए - इसे मालुम करने के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श (Linear Programming Model) का संरूपण कीजिए ।

4.2.2 न्यूनतमीकरण समस्या (Minimization Problems)

आइए अब हम तीन चरों वाली एक अन्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण करें जहाँ हमें उद्देश्य फलन का न्यूनतमीकरण करना है । इस संबंध में, हम निम्नलिखित उदाहरण ले रहे हैं :

उदाहरण 2 : एक शीतल पेय कंपनी के पास तीन बाटलिंग संयंत्र हैं जो दो अलग-अलग स्थानों पर स्थित हैं । प्रत्येक संयंत्र में तीन अलग-अलग प्रकार के पेय A, B और C [illegible] जाते हैं । प्रतिदिन भरे गए बोतल की संख्या के रूप में तीन संयंत्रों की क्षमताएँ निम्नलिखित हैं :

	उत्पाद A	उत्पाद B	उत्पाद C
संयंत्र I	3000	1000	2000
संयंत्र II	1000	1000	4000
संयंत्र III	2000	500	5000

बाजार का सर्वेक्षण करने से पता चलता है कि किसी भी विशेष महीने में A के [illegible] बोतलों की, B के 16,000 बोतलों की और C के 48,000 बोतलों की मांग होता है । संयंत्र I, II, III को चलाने में क्रमश: 600 रु॰, 400 रु॰ और 500 रु॰ का खर्च बैठता है । यह मालुम करने के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में इसका संरूपण कीजिए कि एक महीने में प्रत्येक संयंत्र को कितने दिन चलाया जाए जिससे कि बाजार की मांग की पूर्ति करते रहने के साथ उत्पादन खर्च को न्यूनतम किया जा सके ।

हल : मानलीजिए कि कंपनी एक महीने में संयंत्रों I, II, III को क्रमशः x_1, x_2 और x_3 दिन चलाता है । तीन संयंत्रों द्वारा उत्पादित उत्पाद A की मात्रा यह है :

$$3000x_1 + 1000x_2 + 2000x_3$$

उत्पाद A की माँग 24,000 बोतलों की है । हम x_1, x_2 और x_3 के ऐसे मान ज्ञात करना चाहते हैं जिससे कि बाजार की मांग पूरी हो जाए । अत:

$$3000x_1 + 1000x_2 + 2000x_3 \geq 24{,}000$$

इसी प्रकार, उत्पाद B और C के लिए

$$1000x_1 + 1000x_2 + 500x_3 \geq 16{,}000$$

और

$$2000x_1 + 4000x_2 + 3000x_3 \geq 48{,}000$$

क्योंकि दिनों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती, इसलिए

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

संयंत्रों I, II और III को चलाने में होने वाला कुछ खर्च यह होगा

$$600x_1 + 400x_2 + 500x_3.$$

यहाँ, क्योंकि हम कुल खर्च को कम से कम करना चाहते हैं, इसलिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण इस प्रकार किया जा सकता है :

$$Z = 600x_1 + 400x_2 + 500x_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$3000x_1 + 1000x_2 + 2000x_3 \geq 24{,}000$$
$$1000x_1 + 1000x_2 + 500x_3 \geq 16{,}000$$
$$2000x_1 + 4000x_2 + 3000x_3 \geq 48{,}000$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को स्वंय हल कीजिए ।

प्रश्न 2 : एक मरीज के आहार में कम से कम 400 इकाई विटामिन, 50 इकाई खनिज पदार्थ और 1400 इकाई कैलॉरी होनी चाहिए । तीन खाद्य पदार्थ A, B और C प्रति इकाई क्रमशः 4रु॰, 3रु॰ और 3.50रु॰ के भाव से मिल रहे हैं । यदि एक इकाई A में 200 इकाई विटामिन, 2 इकाई खनिज पदार्थ और 40 इकाई कैलॉरी हों, एक इकाई B में 100 इकाई विटामिन, 3 इकाई खनिज पदार्थ और 30 इकाई कैलॉरी हों, और एक इकाई C में 200 इकाई विटामिन, 2 इकाई खनिज पदार्थ और 35 इकाई कैलॉरी हो, तो कम से कम खर्चे पर खाद्य पदार्थों का संयोजन ज्ञात करने के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में इसका संरूपण कीजिए ।

4.2.3 ग्राफीय हल (Graphical Solutions)

इकाई 3 में हमने दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि पर चर्चा की है । अब हम यह देखेंगे कि किस प्रकार एक ग्राफ की सहायता से तीन चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल किया जाता है ।

इसके लिए पहले हम कुछ सरल उदाहरण लेंगे ।

उदाहरण 3 : निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या लीजिए :

$$Z = x_1$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध यह हो

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

हल : क्योंकि तीन चर x_1, x_2, x_3 हैं इसलिए त्रिविम आकाश (Three Dimensional Space) में ग्राफ खींचना होता है ।

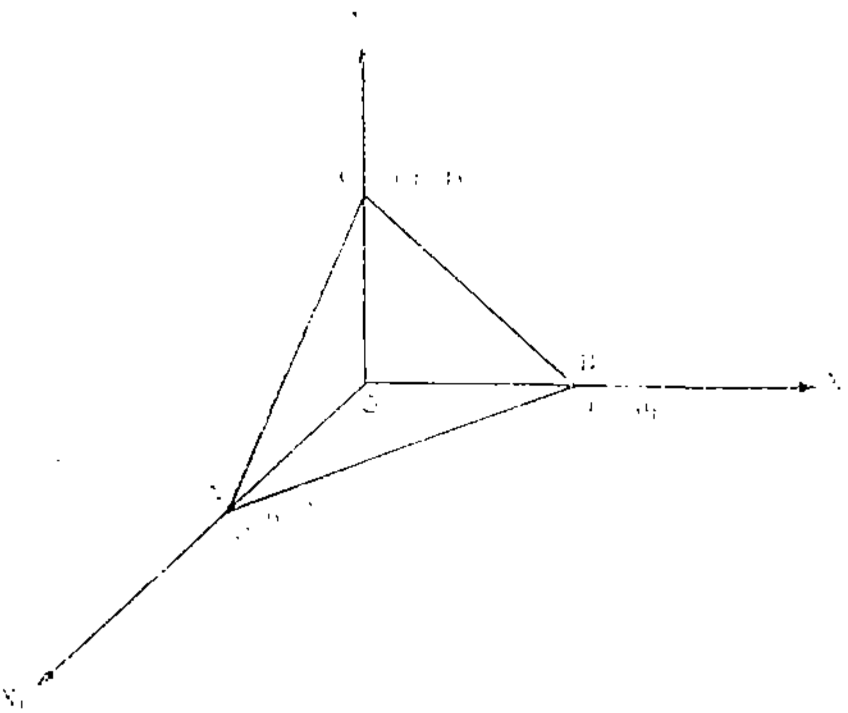
समीकरण

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

एक समतल को निरूपित करता है । यदि हम इस समतल और निर्देशांक अक्ष का प्रतिच्छेद लें तो हमें निम्नलिखित विन्दु प्राप्त होते हैं

A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) और C (0, 0, 1)

जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है ।



चित्र 1

क्योंकि

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$$

इसलिए **सुसंगत प्रदेश** (Feasible Region) वह भाग होता है जिसमें मूल बिन्दु होता है और जो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् चरम बिन्दुओं को मिलाने से बने चतुष्फलक OABC पर और उसके अंदर बिन्दु समुच्चय O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) और C (0, 0, 1) होंगे,

जहाँ

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 1,\ x_3 \ge 0$$

आप यहाँ यह आसानी से देख सकते हैं कि उद्देश्य फलन Z बिन्दु (1, 0, 0) पर अधिकतम है, अतः Z का अधिकतम मान = 1.

उदाहरण 4 : निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

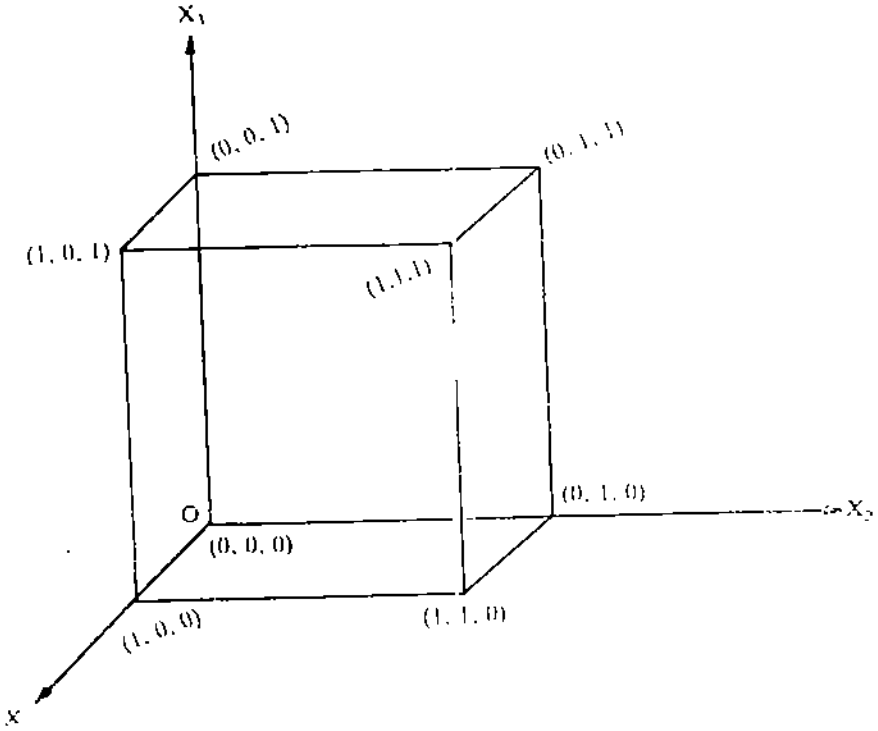
$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1$$

$$x_1 > 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

हल : यदि आप इसका ग्राफ खींचे, तो आप पाएंगे कि यह इकाई लंबाई की भुजा वाले घन का अभ्यंतर (interior) हैं, जैसा कि चित्र 2 में दिखाया गया है ।



चित्र 2

घन के 8 शीर्ष बिन्दु होते हैं और ये चरम बिन्दु होते हैं । इन चरम बिन्दुओं में से बिन्दु (1, 1, 1) Z का मान अधिकतम होता है । इसलिए Z का अधिकतम मान = 3.

उदाहरण 5 : $Z = 0.5x_1 + 6x_2 + 5x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 24$$

$$x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \le 12$$

$$3x_1 + x_2 \qquad \le 12$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, 3x_3 \ge 0.$$

हल : समीकरण

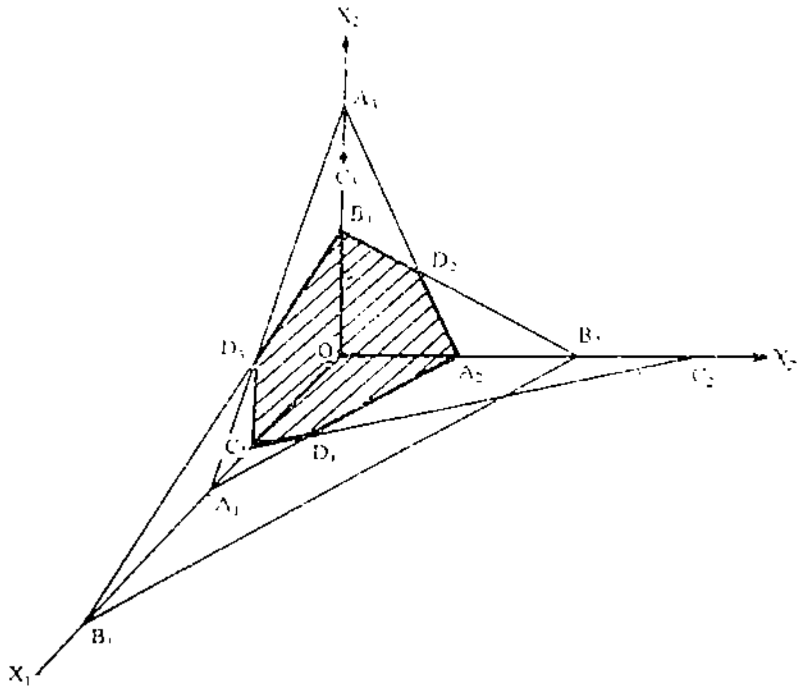
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24$$

और $$x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 = 12$$

समतल को निरूपित करते हैं । पर,

$$3x_1 + x_2 = 12$$

x_1 x_2 समतल की एक रेखा है जैसा कि चित्र 3 में दिखाया गया है ।



चित्र 3

समीकरण

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24.$$

समतल $A_1 A_2 A_3$ से निरूपित होता है

समीकरण

$$x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 = 12$$

समतल $B_1 B_2 B_3$ से निरूपित होता है

समीकरण

$$3x_1 + x_2 = 12$$

रेखा $C_1 C_2$ को निरूपित करता है

सुसंगत प्रदेश के चरम बिन्दु ये हैं

$$C_1\ (4, 0, 0)\ ,\ D_1\left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, 0\right),\ A_2(0, 4, 0)\ ,\ D_2\left(0, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$B_3\ (0, 0, 4)\ ,\ D_3\left(4, 0, \frac{8}{3}\right)$$ हैं।

उद्देश्य फलन Z का अधिकतम मान बिन्दु

$$D_2\left(0, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

पर है और उद्देश्य फलन Z का अधिकतम मान यह है

$$Z = \frac{88}{3}$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए ।

प्रश्न 3 : ग्राफीय विधि से निम्नलिखित प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

हमने 3 चरों वाली अधिकतमीकरण समस्या के ग्राफीय हलों से संबंधित उदाहरणों पर चर्चा की है । आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करके अधिकतमीकरण समस्या की तरह न्यूनतमीकरण समस्या को स्वयं हल करने का प्रयास कर सकते हैं ।

प्रश्न 4 : $Z = x_1 - 2x_2 - x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि व्यवरोध ये हों

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 1000 \\ 2x_2 + 4x_3 &\leq 800 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4.3 तीन से अधिक चरों में गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation in More than Three Variables)

इस भाग में हम तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण करेंगे । आइए अब हम यह देखें कि इस प्रकार की समस्याओं को हम ग्राफीय विधि से हल कर सकते हैं या नहीं । इस संबंध में यहाँ हम अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण की दो स्थितियाँ लेंगे ।

4.3.1 अधिकतमीकरण समस्या (Maximization Problems)

एक कंपनी चार उत्पाद p_1, p_2, p_3 और p_4 बनाती है । इन उत्पादों को बनाने में पानी, आटा, हाप और यीस्ट जैसे साधनों का प्रयोग किया जाता है । इसके लिए कंपनी को पानी मुफ्त दिया जाता है । अत: उत्पादन की क्षमता अन्य साधनों की मात्रा पर निर्भर करता है । नीचे की सारणी में प्रत्येक उत्पाद की 1 इकाई के उत्पादन के लिए आवश्यक प्रत्येक साधन की मात्रा, उपलब्ध प्रत्येक साधन की मात्रा और प्रत्येक उत्पाद की इकाई पर हुई आमदनी दी गई है । कंपनी के सामने समस्या इस बात का निर्णय लेने की है कि कितनी मात्रा में वह प्रत्येक उत्पाद का उत्पादन करे जिससे कि वह अपनी आमदनी को अधिकतम कर सके,

	p_1	p_2	p_3	p_4	उपलब्ध
माल्ट	1	1	0	3	50kg
हाप	2	1	2	1	150kg
यीस्ट	1	1	1	4	80kg
आमदनी	6 रू॰	5 रू॰	3 रू॰	7 रू॰	

मानलीजिए हम निर्णय चर (Decision Variables) लेते हैं

x_1 = उत्पादित किए जाने वाले उत्पाद p_1 की इकाइयों की संख्या

x_2 = उत्पादित किए जाने वाले उत्पाद p_2 की इकाइयों की संख्या

x_3 = उत्पादित किए जाने वाले उत्पाद p_3 की इकाइयों की संख्या

x_4 = उत्पादित किए जाने वाले उत्पाद p_3 की इकाइयों की संख्या

तब एक दिए हुए उत्पादन प्रोग्राम से हुई आमदनी Z यह होगी

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4.$$

क्योंकि जितनी मात्रा में प्रत्येक साधन उपलब्ध है, उससे अधिक मात्रा में हम साधन का प्रयोग नहीं कर सकते और केवल 50kg माल्ट उपलब्ध है, इसलिए x_1, x_2, x_3 और x_4 निम्नलिखित व्यवरोधों को अवश्य संतुष्ट करेंगे

$$x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 \leq 50$$

इसी प्रकार आप अन्य दो व्यवरोध प्राप्त कर सकते हैं

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 150$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 80$$

अंत में, हम प्रत्येक उत्पादन पर ऋणेतर संबंधी प्रतिबंध लगाते हैं, अर्थात्

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

इस तरह, समस्या यह हो जाती है

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_4 \quad & \leq 50 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 & \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \quad & \geq 0. \end{aligned}$$

4.3.2 न्यूनतमीकरण समस्या(Minimization Problems)

वह आहार समस्या लीजिए जिसमें आप कुछ आवश्यकताओं की पुर्ति के लिए खर्चे का न्यूनतमीकरण करना चाहते हैं। मानलीजिए आपके आहार के खाद्य पदार्थ चार आधारभूत खाद्य पदार्थ समूहों अर्थात् चाकलेट केक, आइसक्रीम, सोडा और चीज़ केक में से कोई एक है। इस समय खाने के लिए निम्नलिखित चार खाद्य पदार्थ अर्थात् ब्राउनी, चाकलेट आइसक्रीम, कोला और पाइन एप्पल चीज़ केक उपलब्ध हैं। एक ब्राउनी की कीमत 5रू॰, एक स्कूप चाकलेट की

आइसक्रीम की कीमत 2रु॰, एक बोतल कोला की कीमत 3रु॰ और एक पीस पाइनएप्पल चीज़ केक की कीमत 8रु॰ है । प्रतिदिन आपको कम से कम 500 केलौरी, 6 इकाई चाकलेट, 10 इकाई चीनी और 8 इकाई वसा की आवश्यकता होती है । एक इकाई खाद्य पदार्थ में मौजूद पोषण पदार्थ की मात्रा को नीचे की सारणी में दिखाया गया है। एक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श का संरूपण कीजिए जिसका प्रयोग न्यूनतम खर्चे पर आपको दैनिक पोषण पदार्थ की आवश्यकता की पूर्ति के लिए किया जा सकता है ।

	कैलॉरी	चाकलेट	चीनी	वसा
ब्राउनी	400	3	2	2
चाकलेट आइसक्रीम (1 स्कूप)	200	2	2	4
कोला (1 बोतल)	150	0	4	1
पाइनएप्पल चीज़ केक (1 पीस)	500	0	4	5

निम्नलिखित निर्णय चर (decision variables) लीजिए :

x_1 = प्रतिदिन खायी गई ब्राउनियों की संख्या

x_2 = प्रतिदिन खाए गए चाकलेट आइसक्रीम के स्कूपों की संख्या

x_3 = प्रतिदिन पिए गए कोला बोतलों की संख्या

x_4 = प्रतिदिन खाए गए पाइनएप्पल चीज़ केक के पीसों की संख्या

आपका उद्देश्य अपने आहार के खर्च को न्यूनतम करना है

आहार पर कुल खर्च = $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4$.

अत: **उद्देश्य फलन** (Objective Function)

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4$$

का न्यूनतमीकरण करना है ।

प्रतिदिन ली गई कैलॉरी

$$3x_1 + 2x_2$$

है । और, क्योंकि न्यूनतम आवश्यकता 6 इकाई की है, इसलिए

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6.$$

इसी प्रकार चीनी व्यवरोध और वसा व्यवरोध ये हैं

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$

ऋणेतर संबंधी प्रतिबंध ये हैं

$$x_1 \geq 9, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0$$

अत: समस्या का गणितीय रूप यह हो जाता है

$$\mathbf{Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

अंतिम भाग में हमने ग्राफ की सहायता से तीन चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल किया है । वहाँ आपने यह देखा है कि सुसंगत प्रदेश (Feasible Region) एक त्रिविम चित्र था । यदि तीन से अधिक चर हों, तो हम चार या इससे अधिक विमाओं के चित्र नहीं बना सकते । दूसरे शब्दों में हम ग्राफीय विधि से इस समस्या को हल नहीं कर सकते । अत: हमें एक ऐसी विधि की आवश्यकता है जिससे कि अधिक चर वाली व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल किया जा सके । इस विधि को आप खंड 2 में पढ़ेंगे । अंत में, यहां हम व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय संरूपण दे रहे हैं ।

4.3.3 व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या (General Linear Programming Problems)

अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम r चरों और m व्यवरोधों वाली व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या की व्याख्या कर सकते हैं । व्यापक रैखिक समस्या यह है :

यदि r चरों वाली m रैखिक असमिकाओं का समुच्चय दिया हुआ हो, तो हम इन चरों के ऐसे ऋणेतर मान मालूम करना चाहते हैं जो कि व्यवरोधों को संतुष्ट करते हों और चरों के कुछ रैखिक फलन का अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करते हों ।

गणितीय रूप में,

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ir} x_r\ (\geq = \leq)\ b_i, \quad i = 1, 2 \ldots, m$$

अर्थात्

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1r} x_r\ (\geq = \leq)\ b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2r} x_r\ (\geq = \leq)\ b_2$$

....

....

$$a_{m1} + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_r\ (\geq = \leq)\ b_r.$$

यहाँ r चरों वाले m व्यवरोध हैं और प्रत्येक x_j व्यवरोध का एक और केवल एक चिह्न $\leq$ या $=$ या $\geq$ होता है, पर अलग-अलग व्यवरोध में अलग-अलग चिह्न हो सकता है । हम

$$x_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, r$$

[illegible] करने वाले चरों x_j के ऐसे मान ज्ञात करना चाहते हैं जो रैखिक [illegible] फलन

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_r$$

का अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करते हैं । यहाँ यह मान लिया गया है कि a_{ij}, b_i, c_j [illegible] अचर हैं ।

4.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए इस इकाई को हम यहाँ समाप्त कर रहे हैं

1. तीन या तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संरूपण।
2. ग्राफीय विधि से रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करना जबकि चरों की संख्या तीन हो और उस स्थिति में ग्राफीय विधि से रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने में कठिनाई का सामना करना जबकि चरों की संख्या चार या अधिक हो।
3. व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय संरूपण।

4.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

प्रश्न 1) $Z = 40x_1 + 35x_2 + 30x_3$

का अधिकतमीकरण करना जबकि व्यवरोध ये हों

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 120$

$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 160$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

प्रश्न 2) $Z = 4x_1 + 3x_2 + 3.5x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$200x_1 + 100x_2 + 200x_3 \geq 400$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 50$

$40x_1 + 30x_2 + 35x_3 \geq 1400$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

जहाँ

x_1 = खाद्य पदार्थ A की इकाइयों की संख्या

x_2 = खाद्य पदार्थ B की इकाइयों की संख्या

x_3 = खाद्य पदार्थ C की इकाइयों की संख्या

प्रश्न 3) इष्टतम हल यह है:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 10$

और अधिकतम

$Z = 36.$

प्रश्न 4) $Z = x_1 - 2x_2 - x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$-10x_1 - 5x_2 - 2x_3 \geq -1000$

$-2x_2 - 4x_3 \geq -800$

प्रत्येक व्यवरोध को −1 से गुणा कीजिए,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

इष्टतम हल $x_1 = 0$, $x_2 = 150$, $x_3 = 125$ हैं और न्यूनतम $Z = 425$.

4.6 शब्दावली

उद्देश्य फलन	objective function
निदर्श	model
निर्णय चर	decision variable
व्यापक	general
सुसंगत हल	feasible solution

समीक्षा (Review)

आशा है कि अब तक आपने इस खंड का अध्ययन अच्छी तरह से अवश्य कर लिया होगा। यह पहला खंड है और जैसाकि आप जानते हैं, इसमें चार इकाइयाँ हैं। इकाई 1 में आपने आधारभूत गणित की मूलभूत संकल्पनाओं अर्थात् आव्यूहों, सारणिकों और सदिशों की संकल्पनाओं को फिर से दोहराया है। इकाई 2 में असमिकाओं और अवमुख समुच्चय की अभिधारणा पर चर्चा की गई है जहाँ दो और दो से अधिक चरों वाली ग्राफीय विधियों से इष्टतमीकरण करके रैखिक प्रोग्रामन के आधारभूत लक्षणों के ज्यामितीय निरूपण पर विशेष बल दिया गया है।

खंड में पढ़ाई गई सामग्री को आप कितना समझ पाए हैं- इसे जानने के लिए आप स्व जांच प्रश्नों के रूप में निम्नलिखित संख्याओं को हल करने का प्रयास कीजिए। आप अपने उत्तर और हल की जांच अगले पृष्ठ पर दिए गए उत्तर और हल से कर सकते हैं।

समस्या 1: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

तो दिखाइए कि $AB \neq BA$.

समस्या 2: यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 = A^{-1}$.

समस्या 3: आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए।

समस्या 4: निम्नलिखित आव्यूहों की जाति (Rank) ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

समस्या 5: बताइए कि निम्नलिखित सदिशों के संग्रह में किससे E^n का आधार, विस्तृति E^n प्राप्त होती या कुछ भी प्राप्त नहीं होती हैं

$$\text{(i)} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii.)} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(iii) $a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}-3\\-1\\2\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}-5\\0\\5\end{bmatrix}$

(iv) $a_1 = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}-1\\-4\\-1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

समस्या 6: मानलीजिए $a_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$, और $a_3 = \begin{bmatrix}5\\-2\\5\end{bmatrix}$

बताइए कि ये सदिश रैखिकत: स्वतंत्र हैं या रैखिकत: परतंत्र?

समस्या 7: निम्नलिखित बिन्दुओं से बने अवमुख समुच्चय का रेखाचित्र बनाइए

क) (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)

ख) (3, 4), (5, 6), (0, 0), (2, 2), (1, 0), (2, 5), (4, 7)

ग) (−1, 2), (3, −4), (4, 4), (0, 0), (6, 5), (7, 1)

समस्या 8: $Z = 10x + 15y$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$x + 2y \geq 8$

$2x + y \geq 10$

$4x + 3y \leq 12$

$x, y \geq 0$

समस्या 9: $Z = 6x + 4y$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$3x + 2y \leq 18$

$x \leq 4$

$y \leq 6$

$x, y \geq 0$

समस्या 10: ग्राफीय विधि से निम्नलिखित प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए

$Z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि व्यवरोध ये हों

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

समीक्षा : उत्तर/हल (Review : Answers/Solutions)

समस्या 2: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

समस्या 3: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

समस्या 4: P (A) = 3 P (B) = 2.

समस्या 5:
(i) a_1, a_2, a_3 से E^3 का आधार और विवृति E^3 प्राप्त होती है ।
(ii) a_1, a_2 से कोई आधार प्राप्त नहीं होता ।
(iii) a_1, a_2, a_3 से E का आधार और विस्तृत E^n प्राप्त नहीं होती ।
(iv) a_1, a_2, a_3 से E^3 का एक आधार प्राप्त होता है ।

समस्या 6: a_1, a_2, a_3 रैखिकत: परतंत्र हैं

समस्या 8: असंगत

समस्या 9: बहु-हल
चरम बिन्दु (4, 3) और (0, 9) हैं
Z का अधिकतम मान = 36

समस्या 10: इष्टतम हल यह है : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$
और न्यूनतम

Notes

Notes

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM - 12

रैखिक प्रोग्रामन
(Linar Programming)

खंड

2

एकधा विधि और द्वैत (SIMPLEX METHOD AND DUALITY)

पूर्वदर्शन (Preview)

खंड 1 में हमने आव्यूहों (matrices) और सदिश समष्टियों की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं पर पुनः विचार किया है। हमने संक्षेप में असमिकाओं (inequalities) और उनके ग्राफीय हल पर भी चर्चा की है। इस खंड में हमने आपको अवमुख समुच्चय (convex set), चरम बिन्दु (extreme point) और इष्टतमीकरण (optimization) की अभिधारणा से भी परिचित कराया है। इष्टतमकारी समस्याओं के लिए आप ने अधिकतमीकरण (maximization) और न्यूनतमीकरण समस्याओं के लिए रैखिक प्रोग्रामन निदर्श (linear programming models) बनाने की विधि सीखी हैं। हमने दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि पर चर्चा की है और यह पाया है कि तीन या तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने में यह विधि लागू नहीं होती। अतः इस खंड में हम एक ऐसी विधि विकसित करेंगे जिससे आप दो, तीन या तीन से अधिक–मान लीजिए–बीस चरों वाली किसी भी रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कर सकेंगे।

इस खंड में चार इकाइयाँ–अर्थात् इकाई 5,6,7 और 8 हैं। इस खंड की पहली इकाई अर्थात् इकाई 5 में हम आपको चरों की प्रकृति, रैखिक प्रोग्रामन समस्या के मानक रूप और हलों के प्रकार से परिचित कराएंगे।

इकाई 6 में हम किसी भी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए एकधा कलन-विधि (simplex algorithm) के चरणों को विकसित करेंगे। इस इकाई में हम कृत्रिम चरों (artificial varibles) वाली समस्या को हल करने के लिए **द्विचरण विधि** (two–phase method) नामक एक अन्य विधि पर चर्चा करेंगे।

इकाई 7 और इकाई 8 में हम द्वैत-सिद्धांत (theory of duality) पर चर्चा करेंगे। इकाई 7 में आप किसी भी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए द्वैती समस्याओं को प्रस्तुत करना सीखेंगे। इकाई 8 में, दुर्वल और प्रवल द्वैत प्रमेयों की सहायता से आद्य और द्वैती समस्याओं (primal and dual problems) में संबंध स्थापित करेंगे। अंत में आप इष्टतम आद्य और द्वैती चरों (optimal primal and dual variables) का निर्वचन करना सीखेंगे।

इकाई 5 मानक रूप और हल

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

खंड 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ समस्याओं को अर्थात् **उत्पाद मिश्रण समस्या, निवेश समस्या, आहार समस्या, निरीक्षण समस्या** आदि को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं (linear programming problems) के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इस खंड में आप इन रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की ग्राफीय विधि का भी अध्ययन किया है और यह पाया है कि ग्राफीय विधि दो निर्णय चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए ही उपयोगी सिद्ध होती है। तीन या तीन से अधिक चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में यह विधि उपयोगी सिद्ध नहीं होती। अब प्रश्न उठता है कि **ऐसी समस्याओं का हल किस प्रकार किया जाता है?** इस कार्य के लिए एकधा विधि (simplex method) का पता लगाया गया। एकधा विधि को ऐसी किसी भी समस्या को हल करने में लागू किया जा सकता है जिसे एकघात प्रतिबंधों (linear constraints) के अधीन रैखिक उद्देश्य फलन (linear objective function) के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता हो। इस विधि का अध्ययन करने के दौरान आप देखेंगे कि इस विधि में समस्या के निर्णय चरों या प्रतिबंधों की संख्या की कोई सीमा नहीं होती।

ध्यान दीजिए कि यहाँ शब्द "एकधा" का विधि से कोई संबंध नहीं है जैसा कि अब प्रयोग में लाया जा रहा है। इसका उद्गम एक विशेष समस्या में हुआ था जिसका अध्ययन हमने विधि के प्रारंभिक विकास में किया था। इकाई 6 में, हम इस पर विस्तार से चर्चा करेंगे। पर, एकधा विधि पर चर्चा करने के लिए यह आवश्यक है कि आप कुछ आधारभूत संकल्पनाओं और परिणामों को जान लें। इसके लिए आपको रैखिक प्रोग्रामन समस्या के दो महत्त्वपूर्ण रूपों अर्थात् मानक रूप (standard form) और विहित रूप (canonical form) को जानना आवश्यक है। आपको कुछ विशेष प्रकार के चरों अर्थात् **न्यूनतापूरक चर** (slack variable) और **आधिक्यपूरक चर** (surplus variables) से भी परिचित होना चाहिए। आपको **सुसंगत हल** (feasible solution), **आधारी हल** (basic solution) **इष्टतम हल** (optimal solution) आदि जैसे हलों को पहचानना चाहिए। इस इकाई में हम आपको एकधा विधि से संबंधित रैखिक प्रोग्रामन की इन आधारभूत आवश्यकताओं से परिचित कराएंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- असमिका प्रतिबंधों को समीकरणों में रूपांतरित कर सकेंगे
- दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को मानक रूप और विहित रूप में लिख सकेंगे
- सुसंगत हल, आधारी हल, आधारी सुसंगत हल और इष्टतम हल (आधारी या अनाधारी) पहचान सकेंगे।

5.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या (LPP) का मानक रूप

इकाई 3 में हमने केवल दो चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के गणितीय निदर्श (mathematical model) बनाने के बारे में चर्चा की है। इकाई 4 में, हमने इस विधि को

ीन या अधिक चरों वाली समस्या का गणितीय निदर्श बनाने में लागू की हैं। इन दो काइयों में दिए गए सभी उदाहरण मुख्यतः निम्नलिखित दो प्रकार की समस्याओं से ंबंधित रही हैं।

) **अधिकतमीकरण समस्या (maximization problems)**

) **न्यूनतमीकरण समस्या (minimization problems)**

ौर, आप यह भी जानते हैं कि प्रतिबंध '≤', '=' या '≥' प्रकार के होते हैं और ामान्यतः चर ऋणेतर होते हैं। लेकिन, कभी-कभी इन चरों पर ≤ , = ≥, चिह्नों का तिबंध नहीं होता। इस तरह सभी प्रकार के चरों, चाहे वे प्रतिबंधित, अप्रतिबंधित या नों हों, के लिए हम निम्नलिखित **व्यापक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श** (General Linear rogramming Model, GLPM) दे सकते हैं

ेश्य फलन (objective function)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण (या न्यूनतमीकरण) कीजिए जबकि व्यवरोध (constraints) **ये हों**

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \ (\le, =, \ge) b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \ (\le, =, \ge) b_2$$

....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \ (\le, =, \ge) b_m$$

र प्रतिबंध ये हों

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0.$$

ां c_j, b_i, a_{ij} $(i = 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ **अचर हैं और** $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ **निर्णय** (decision variables) **हैं। प्रत्येक व्यवरोध के लिए केवल एक चिह्न** $(\le =, \ge)$ ा है।

र की समस्या में, सभी व्यवरोधों में चर x_j (j वें चर) के गुणांकों से बने सदिश ector) को चर x_j से संबंधित सदिश कहा जाता है और इसे A_j से प्रकट किया जाता जहां

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

तरह, रैखिक प्रोग्रामन निदर्श के प्रत्येक चर x_j के साथ हम एक अद्वितीय सदिश ique vector) $A_j \in E^m$, का संबंध स्थापित करते हैं, जहाँ E^m, m व्यवरोधों

$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ से जनित यूक्लिडीय समष्टि (Euclidean space) को प्रकट करता सदिश $A_j, j = 1, 2, \dots, n$ को **सक्रियता सदिश** (activity vectors) कहा जाता है। राशियों $b_1, b_2, ..., b_m$ से बने स्तंभ सदिश को **आवश्यकता सदिश** (requirement vector) कहा जाता है और इसे **B** से प्रकट किया जाता है। उद्देश्य फलन के गुणांक $c_1, c_2, ..., c_n$ को क्रमशः चरों $x_1, x_2, \dots, x_n$ से संबंधित मूल्य कहा जाता है। और, सदिश $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ को **मूल्य सदिश** (price vector) कहा जाता है।

रैखिक प्रोग्रामन निदर्श बना लेने के बाद हमारा अगला चरण इस निदर्श को हल करना इकाई 3 में आप यह देख चुके हैं कि रैखिक प्रोग्रामन निदर्शों को विभिन्न रूपों (अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण समस्याएँ और व्यवरोध ≤, = या ≥ या मिश्रित) प्रस्तुत किया जा सकता है। अतः इन रूपों को अपरिवर्तित करने की आवश्यकता है कि हम एक मानक हल प्रक्रिया विकसित कर सकें। इस पर चर्चा हम अगली इकाई करेंगे। इस प्रकार की हल प्रक्रिया के विकास के लिए हमें रैखिक प्रोग्रामन निदर्श को सुपरिचित रूपों अर्थात् मानक रूप और विहित रूप में अभिकलित करना होता है। वि रूप विशेष रूप से **द्वैत सिद्धांत** (duality theory) की, जिस पर अध्ययन इकाई 7 में चर्चा में अधिक उपयोगी सिद्ध होगा। मानक रूप का प्रयोग किसी भी रैखिक प्रोग्राम समस्या को हल करने की व्यापक प्रक्रिया को विकसित करने में किया जाएगा।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के मानक रूप के अभिलक्षण

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के मानक रूप के निम्नलिखित अभिलक्षण होते हैं:

1. सभी व्यवरोध समीकरण होते हैं।
2. सभी चर ऋणेतर होते हैं।
3. उद्देश्य फलन अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण प्रकार के होते हैं।
4. प्रत्येक व्यवरोध समीकरण के दक्षिण पक्ष का अवयव ऋणेतर होता है।

सामान्यतः असमिकाओं (inqualitics) की तुलना में समीकरणों के साथ काम करने अधिक सुविधा होती है। यही कारण है कि दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरो की असमिकाओं को समीकरणों में रूपांतरित करना चाहेंगे। कुछ अतिरिक्त चरों को, न्यूनतापूरक चर (slack variable) या आधिक्यपूरक चर (surplus variable) कहा जाता है लेकर रूपांतरण के कार्य काफी आसानी से लागू किया जा सकता है।

5.2.1 न्यूनतापूरक चर (Slack Variables)

एक उदाहरण लेकर हम न्यूनतापूरक चर को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 1: नीचे दी गई गुणन मिश्रित रैखिक प्रोग्रामन समस्या में, जिसे हमने इकाई 3 प्रस्तुत किया था, दोनों व्यवरोध '≤' प्रकार के थे

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$3x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

हल : उदाहरण के लिए पहला व्यवरोध $2x_1 + 3x_2 \le 12$ लीजिए। इस असमिका व्यवरोध को एक-एक समीकरण में रूपांतरित करने के लिए हम एक नया चर

$$x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0.$$

लेते हैं। हम x_3 को न्यूनतापूरक चर (slack variable) कहते हैं। इस नए चर $x_3 \ge 0$, को लेने पर हमारे उदाहरण का पहला व्यवरोध यह हो जाता है

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12.$$

इसी प्रकार, दूसरे व्यवरोध के लिए हम न्यूनतापूरक चर $x_4 \ge 0$ लेते है, और तब दूसरा व्यवरोध यह हो जाता है

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

अय दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

सामान्यतः, यदि किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या में

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \le b, \;\; b \ge 0,$$

के प्रकार का व्यवरोध हो, तो वाम पक्ष में कुछ ऋणेतर चर x_3 जोड़कर इसे एक समीकरण के रूप में बदला जा सकता है। इस नए चर को न्यूनतापूरक चर कहा जाता है और व्यवरोध निम्न समीकरण के रूप में रूपांतरित हो जाता है

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_3 = b, \;\; \text{जहाँ} \;\; x_3 \ge 0.$$

इस तरह 'से कम या के बराबर' प्रकार के व्यवरोध की बायीं ओर जोडे गए ऋणेतर चर को, जो इसे एक समीकरण में रूपांतरित कर देता है, न्यूनतापूरक चर कहा जाता है। इस चर के मान को प्रयोग में नहीं लाए गए साधन की मात्रा माना जा सकता है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए,

प्रश्न 1 : दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या यह है

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1 + 4x_2 \le 5$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

और न्यूनतापूरक चर लेने पर इसके व्यवरोध, समीकरणों में रूपांतरित हो जाते हों।

5.2.2 आधिक्यपूरक चर (Surplus Variables)

यहाँ भी हम आधिक्यपूरक चर को परिभाषित करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लेंगे:

उदाहरण 2: '≥' प्रकार के सभी व्यवरोधों वाली एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या लीजिए

$$\mathbf{Z = 2x_1 + 2x_2}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$\mathbf{3x_1 + 2x_2 \geq 5}$$
$$\mathbf{x_1 + 5x_2 \geq 6}$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$$

हल : इस समस्या का पहला व्यवरोध

$$3x_1 + 2x_2 \geq 5 \text{ या } 3x_1 + 2x_2 - 5 \geq 0$$

लीजिए। अब हम एक नया चर $x_3 \geq 0$ लेंगे जो

$$x_3 = 3x_1 + 2x_2 - 5$$

से परिभाषित हैं जिससे कि इस उदाहरण का पहला व्यवरोध यह हो जाता है

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5.$$

इस नए चर x_3 को, जिसकी सहायता से हमने असमिका ('≥' प्रकार की) को एक समीकरण में रूपांतरित किया है पहले व्यवरोध के वाम पक्ष (left hand side) से घटा दिया जाता है। इस नए चर को **आधिक्यपूरक चर** कहा जाता है।

इसी प्रकार आधिक्यपूरक चर $x_4 \geq 0$ लेकर हम इस समस्या के दूसरे व्यवरोध को एक समीकरण में रूपांतरित कर सकते हैं जिससे कि दूसरे व्यवरोध को अब हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$x_1 + 5x_2 - x_4 = 6.$$

तब दी हुई समस्या यह हो जाती है

$$Z = 2x_1 + 2x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$
$$x_1 + 5x_2 - x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

व्यापक रूप में, आइए हम **आधिक्यपूरक चर** की संकल्पना को व्यवरोध

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 \geq q\,,\ q \geq 0$$

की सहायता से समझने का प्रयास करें।

इस असमिका को एक समीकरण में रूपांतरित करने के लिए वाम पक्ष से कुछ आधिक्य को घटाना होता है। तब हमें यह समीकरण प्राप्त हो सकता है

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 - x_3 = q$$

जहाँ $x_3 \geq 0$ को आधिक्यपूरक चर कहा जाता है।

इस तरह, व्यवरोध को समीकरण में रूपांतरित करने के लिए 'से बड़ा या के बराबर' प्रकार के व्यवरोध के वाम पक्ष से घटाए गए ऋणेतर चर को आधिक्यपूरक चर कहा जाता है। इस चर के मान को अपेक्षित न्यूनतम स्तर से अधिक हो गई मात्रा माना जा सकता है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए :

प्रश्न 2: इकाई 3 में दी गई निम्नलिखित आहार समस्या में दोनों व्यवरोध $\geq$ प्रकार के हैं।

$$Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

आधिक्यपूरक चर लेने पर व्यवरोधों को समीकरणों में रूपांतरित कर देता है।

व्यापक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श (GLPM) के रूप में प्रस्तुत की गई अधिकांश रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में हम यह देखेंगे कि $b_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m$. मानलीजिए किसी व्यवरोध की मूल रचना में $b_i \leq 0$. इस व्यवरोध के दोनों पक्षों को -1 से गुणा करने पर हमें $-b_i \geq 0$ प्राप्त होता है। इस तरह सभी व्यवरोधों को एक में रूपांतरित किया जा सकता हैं जहाँ $b_i \geq 0$. अतः आइए हम यह मान लें कि व्यापक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श एक व्यवरोध-समुच्चय को निरूपित करता है, जहां प्रत्येक $b_i \geq 0$.

इन व्यवरोधों को संगत रैखिक युगपत् समीकरणों (linear simultaneous equations) में रूपांतरित करने के लिए हम इन व्यवरोधों को इस प्रकार व्यवस्थित कर सकते हैं।

'$\leq$' चिह्न वाले प्रथम p व्यवरोध लिखिए। '$\geq$' चिह्न वाले अगले q व्यवरोध लिखिए और तब शेष व्यवरोधों को लिखिए जो कि मूलतः समीकरण है।

इस व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोध-निकाय को इस प्रकार लिखा जा सकता है

'$\leq$' चिह्न वाले प्रथम p व्यवरोध हैं

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

....

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n \leq b_p$$

'$\geq$' चिह्न वाले अगले q व्यवरोध ये हैं

$$a_{p+11}x_1 + a_{p+12}x_2 + ... + a_{p+1n}x_n \leq b_{p+q}$$

$$\vdots$$

$$a_{p+q1}x_1 + a_{p+q2}x_2 + ... + a_{p+qn}x_n \geq b_{p+q}$$

शेष व्यवरोध अर्थात् समीकरण ये हैं

$$a_{p+q+11}x_1 + a_{p+q+12}x_2 + \ldots + a_{p+q+1n}x_4 \geq b_{p+q+1}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

या $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, p$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i = p+1, \ldots, p+q$$

और $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = p+q+\ldots+m.$

अब, क्योंकि प्रथम p व्यवरोधों के '≤' चिह्न है, इसलिए प्रथम p व्यवरोधों के वाम पक्ष प्रत्येक व्यवरोध में $x_{n+i} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, p$, p न्यूनतापूरक चर जोड़िए। इन व्यव को आप निम्नलिखित समीकरणों के रूप में लिख सकते हैं

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{j+i} = b_i, i = 1, \ldots, p$$

इसी प्रकार '≥' प्रकार के अगले q व्यवरोधों में से प्रत्येक व्यवरोध में q आधिक्यपूरक जोड़िए। और तब आपको निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{j+i} = b_i, i = p+1, \ldots, p+q.$$

इस तरह, व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी व्यवरोध निम्नलिखित रूप के यु रैखिक समीकरण निकाय (system of simultaneous linear equations) के रूप हो जाते हैं

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, i = p+1, \ldots, p+q$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = p+q+1, \ldots, m.$$

आइए हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इसे अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें

उदाहरण 3: आइए हम व्यवरोध निकाय

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

को तीन युगपद् समीकरणों के समुच्चय में रूपांतरित करें।

हल: ध्यान दीजिए कि दिए हुए तीन व्यवरोधों के दक्षिण पक्ष की सभी प्रविष्टियाँ (entries) धनात्मक हैं। पहले व्यवरोध में आधिक्यपूरक चर $x_3 \geq 0$ लेने पर हमें प्राप्त होता हैं

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

ौर दूसरे व्यवरोध में न्यूनतापूरक चर $x_4 \geq 0$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 5.$$

ीसरा व्यवरोध तो समीकरण रूप में पहले से ही है। अतः परिणामी समीकरण निकाय को स रूप में लिखा जा सकता है

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$
$$7x_1 + x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$

श्न 3: न्यूनतापूरक चर या आधिक्यपूरक चर लेकर निम्नलिखित असमिकाओं को मीकरण के रूप में लिखिए:

$$1x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 8$$
$$x_1 - 3x_2 \geq -6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.3 अप्रतिबंधित चर (Unrestricted Variables)

प ऋणेतर निर्णय चरों (non–negative decision variables) वाली रैखिक प्रोग्रामन स्याओं से अच्छी तरह से परिचित हैं। यदि एक ऐसा रैखिक प्रोग्रामन निदर्श हो जिसमें छ निर्णय चरों के चिह्न पर कोई प्रतिबंध नहीं हो, अर्थात् चर धनात्मक, ऋणात्मक या य हों, तो ऐसी स्थिति में क्या परिणाम निकलता है?

के लिए हमें प्रत्येक अप्रतिबंधित चर के स्थान पर दो ऋणेतर चर लेने होते हैं। ऐसा ना संभव है क्योंकि हम यह लिख सकते हैं

$$(-3) = (+2) - (+5)$$

र शब्दों में, अप्रतिबंधित निर्णय चरों वाले रैखिक प्रोग्रामन निदर्श को इस प्रकार ऊपर ाए गए रूप में प्रतिस्थापन करके सामान्य मानक रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

ये कुछ उदाहरण लेकर इस संकल्पना को अच्छी तरह से समझने का हम प्रयास करेंगे।

ाहरण 4:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$
$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

और x_3 पर चिह्न का कोई प्रतिबंध नहीं है।

हलः हम अप्रतिबंधित चर x_3 को इस रूप में लिखते हैं

$$x_3 = x_3' - x_3'', \text{ जहाँ } x_3', \geq 0, x'' \geq 0$$

तब दी हुई समस्या यह हो जाती है

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3' + 4x_3''$$

जबकि

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3' &\leq 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3' + 2x_3'' &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' &\geq 0 \end{aligned}$$

उदाहरण 5:

$$Z = x_1 - 2x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 - x_2 &\geq -2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

x_1, x_2 अप्रतिबंधित

हलः $x_1 = x_1' - x_1''$ और $x_2 = x_2' - x_2''$ लिखिए

जिससे कि $x_1', x_1'', x_2', x_2'', \geq 0$

तब समस्या यह हो जाती है

$$Z = x' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2''$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$\begin{aligned} 3x_1' - 3x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' &\leq 6 \\ x_1' - x_1'' - x_2' + x_2'' &\geq -2 \\ -x_1' + x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' &= 7 \\ x_1', x_1'', x_2', x_2'' &\geq 0. \end{aligned}$$

इस तरह व्यापक रूप में अप्रतिबंधित चर x_j को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$x_j = x_j' - x_j''$$

जहाँ $x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0.$

यदि A_j चर x_j, से संबंधित सदिश हो, तब दूसरी बार लिखी गई समस्या में इसे ह लिखना चाहिए

$$x_j A_j = (x_j' - x_j'') A_j = x_j' A_j + x_j'' (-A_j)$$

इस तरह नई समस्या में A_j और $-A_j$ क्रमशः चरों x_j' और x_j'' से संबंधित सदिश हैं। अतः उद्देश्य फलन में संगत समंजन (adjustment) यह होगा

$$c_j x_j = c_j x_j' - c_j x_j''$$

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए :

प्रश्न 4: निम्नलिखित प्रोग्रामन समस्या को उस रूप में लिखिए जिसमें सभी चर ऋणेतर हों।

$$Z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 7$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0, x_3 \text{ अप्रतिबंधित}$$

अपने मानक रूप में व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कथन यह हो सकता है

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण (या न्यूनतमीकरण) कीजिए, जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

। आव्यूह संकेतन (matrix notation) में हमारी समस्या का रूप यह होता है

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण (या न्यूनतमीकरण) कीजिए, जबकि

$$AX = B$$
$$X \ge 0$$

है $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

(non-negativity restrictions) को भी संतुष्ट करता हो, तो इसे रैखिक प्रोग्रामन समस्या का **सुसंगत हल** (feasible solution) कहा जाता है।

उदाहरण के लिए इस इकाई के प्रश्न 1 में $x_1 = 3, x = -3$ एक हल है, जबकि $x_1 = 1, x_2 = 1$ एक सुसंगत हल है।

आप यहाँ यह भी देख सकते हैं कि उदाहरण 2 में $x_1 = 1, x_2 = 1$ एक सुसंगत हल है।

दो अज्ञात चरों वाले दो युगपत् समीकरणों का निकाय, अर्थात्

$$3x_1 + 5x_2 = 13$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

लीजिए जिसे आव्यूह संकेतन में इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

अर्थात् यह निकाय $AX = B$ के रूप का है, जहां

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ और } B = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ध्यान दीजिए कि गुणांक आव्यूह (coefficient matrix) की जाति (rank) यह है

$\rho(A) = 2$ (इकाई 1 देखिए)

हम इस निकाय को अद्वितीय रूप से हल कर सकते हैं और हल यह होता है

$$X = A^{-1} B.$$

अर्थात्

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

इस तरह

$$x_1 = 1, x_2 = 2,$$

जिससे समीकरण-निकाय का हल प्राप्त हो जाता है। ध्यान दीजिए कि आप इस निकाय का अद्वितीय हल (unique solution) प्राप्त कर सकते हैं, क्योंकि A^{-1} अद्वितीय है और अज्ञात चरों की संख्या समीकरणों की संख्या के बराबर है।

अब, प्रश्न यह उठता है कि **तीन या अधिक चरों वाले दो समीकरणों के निकाय को किस प्रकार हल किया जाता है?**

उदाहरण के लिए **चार** अज्ञात चरों वाले **दो** समीकरणों का निम्नलिखित निकाय लीजिए :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 5.$$

यह निकाय भी **AX = B** के रूप का है, जहां

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि $\rho(A) = 2$, अर्थात् A के रैखिकतः स्वतंत्र स्तंभों (columns) की संख्या, गुणांक आव्यूह के चार स्तंभों में से दो हैं। आइए अब हम कोई भी दो रैखिकतः स्वतंत्र, मान लीजिए अंतिम दो स्तंभ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ और $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ लें।

A से एक 2 × 2 व्युत्क्रमणीय आव्यूह (non–singular matrix)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

बनाइए। अब x_1, x_2 को (वे चर जो कि A के इस उप-आव्यूह के स्तंभों से संबंधित नहीं है) शून्य के बराबर कीजिए। तब परिणामी निकाय का हल अद्वितीय होता है और यह होता है

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

या

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

अर्थात् $x_3 = 3, x_4 = 5.$

इस तरह, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 5$ मूल निकाय का हल है जिसके दो चर शून्य के बराबर हैं। इस हल को आधारी हल (basic solution) कहा जाता है और चरों x_3 तथा x_4 को, जो शून्येतर है, **आधारी चर** (basic variables) कहा जाता है।

व्यापक रूप में, यदि n अज्ञात चरों वाले m युगपत् समीकरणों का निकाय AX = B के रूप में दिया गया हो, जहाँ A एक m× n आव्यूह है और $\rho(A) = m \ (< n)$. A से एक m×m व्युत्क्रमणीय उप-आव्यूह S लीजिए। X के उन सभी संबंधित घटकों (components) को, जो S के स्तंभों के साथ संबंधित नहीं है, शून्य के बराबर कीजिए। तब परिणामी निकाय के हल को **आधारी हल** कहा जाता है। m चरों को, जो शून्येतर हो सकते हैं, **आधारी चर** कहा जाता है।

इस विधि को और सरल बनाने के लिए A को दो उप-आव्यूहों S और T में बाँट दीजिए जहां S एक m×m व्युत्क्रमणीय आव्यूह (non–singular matrix) है और T में A के वे स्तंभ होते हैं जिन्हें S में शामिल नहीं किया गया है। मान लीजिए। X_S और X_T, क्रमशः S और T के स्तंभों से संबंधित चरों के सदिश हैं। तब आप निकाय AX = B

को निम्न रूप में रख सकते हैं

$$(S, T) \begin{pmatrix} X_s \\ X_t \end{pmatrix} B$$

$$S X_s + T X_t = B$$

$$SX_s = B - TX_t.$$

क्योंकि S व्युत्क्रमणीय है, इसलिए S^{-1} का अस्तित्व होता है। S^{-1} से इस अंतिम संबंध को गुणा कीजिए, तब आपको यह प्राप्त हो सकता है

$$S^{-1} SX_s = S^{-1} B - S^{-1} T X_t$$
$$X_s = S^{-1} B - S^{-1} T X_t$$

अब $X_t = O,$

लीजिए, जहां O शून्य आव्यूह (zero matrix) है। तब इससे यह पता चलता है कि

$$X_s = S^{-1} B.$$

इसे **आधारी हल** कहा जाता है और X_S में शामिल m – चरों को **आधारी चर** कहा जाता है। X_T के अनाधारी चर (non–basic variables) शून्य चर हैं। सामान्यतः $(X_S,0)$ समीकरण -निकाय $AX = B$ का एक आधारी हल है जहां O एक शून्य आव्यूह है। n - अज्ञात चरों वाले m– समीकरणों के निकाय के कितने आधारी हल हो सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर n वस्तुओं के, जहाँ एक बार में m वस्तुएँ ली गई हों, संचयों की संख्या है अर्थात्

$$n_{c_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

आधारी हलों की अधिकतम संख्या है। जिन्हें हम निकाय $AX = B$ से प्राप्त कर सकते हैं। आइए हम एक उदाहरण लेकर इस विधि को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 8: निम्नलिखित समीकरण-निकाय के सभी आधारी हल ज्ञात कीजिए

$$\mathbf{x_1 + 2x_2 + x_3 = 4}$$
$$\mathbf{2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5}$$

हलः दिया हुआ निकाय $AX = B$ के रूप का है जहां

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

जहाँ $\rho(A) = 2$. अतः आधारी हल के दो घटक होंगे जो शून्येतर होंगे। आधारी हलों की संख्या यह होगी

$$^3C_2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3,$$

क्योंकि $m = 2, \quad n = 3.$

सभी आधारी हल ज्ञात करने के लिए आइए पहले हम $x_3 = 0$ लें, तब निकाय इस रूप का हो जाएगा

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$

अर्थात्

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

यहाँ $X_T = (x_3) = 0, X_s = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$. अतः

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},$$

दूसरे शब्दों में

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$$

एक आधारी हल है, जहाँ x_1 और x_2 आधारी चर हैं।

अब, $x_2 = 0$ लीजिए। तब मूल निकाय इस रूप का हो जाएगा

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 5x_3 = 5.$$

अब हम इस हल को इस प्रकार अद्वितीयतः हल कर सकते हैं

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

या

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{5} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}.$$

इसलिए $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1$. यह दिए हुए निकाय का एक अन्य आधारी हल है।

इसी प्रकार, हम $x_1 = 0$ ले सकते हैं। तब निकाय इस रूप का हो जाता है

$$2x_1 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 5x_3 = 5$$

ा $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

ा $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{1}{-9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\ 2/3\end{pmatrix}.$

ौर $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$ दिए हुए निकाय का एक आधारी हल है।

ा तरह हम दिए हुए निकाय के सभी तीन आधारी हल प्राप्त कर सकते हैं जो कि ये हैं

$$x_1 = 2,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 0$$
$$x_1 = 5,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = -1$$
$$x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{5}{3},\quad x_3 = \frac{2}{3}.$$

यहाँ आपको इन तीन हलों के संबंध में एक विशेष बात की ओर ध्यान देने की आवश्यकता है। यहाँ, पहले और तीसरे हल को आधारी चर ऋणेतरकता प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं जबकि दूसरे हल में एक आधारी चर ऋणात्मक होता है। यहाँ पहले और तीसरे हल **आधारी सुसंगत हल** (basic feasible solutions) हैं जबकि दूसरा **हल आधारी असंगत हल** (basic non-feasible solutions) है। इस तरह, **आधारी सुसंगत हल वह आधारी हल होता है जो ऋणेतरकता प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् जहाँ सभी आधारी चर ऋणेतर होते हैं।**

अतः निकाय $AX = B$ का आधारी हल आधारी सुसंगत हल होता है जबकि $X_s \geq 0$.

प्रश्न 6 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

के आधारी हल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7: $2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$

$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2$

के आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए।

उस सुसंगत हल को जो उद्देश्य फलन का इष्टतमीकरण करता है **इष्टतम हल** (optimal solution) कहा जाता है।

यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या यह हो

$$Z = CX$$

का अधितमीकरण (या न्यूनतमीकरण) कीजिए जबकि

$$AX = B$$
$$X \geq 0.$$

तो इस समस्या का आधारी सुसंगत हल इष्टतम हल तब होता है जबकि इससे अधिकतम (या न्यूनतम) मान प्राप्त होता हो।

इस इकाई को समाप्त करने से पहले हम रैखिक प्रोग्रामन के कुछ मूलभूत परिणामों पर चर्चा करेंगे जो कि **एकधा कलन-विधि** (simplex algorithm), जिस पर चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे, कि विकास में एक साधन के रूप में काम करेंगे। हम इन परिणाम को निम्नलिखित प्रमेयों के रूप में प्रस्तुत करते हैं:

प्रमेय 1: सिद्ध कीजिए कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय (convex set) होता है।

उपपत्तिः आप जानते हैं कि न्यूनतापूरक या आधिक्यपूरक चरों को जोड़कर रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोधों को समीकरणों में रूपांतरित किया जा सकता है। अतः आइए हम किसी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोध निकाय को

$$AX = B, X \geq 0$$

के रूप में लें, जहाँ A, एक $m \times n$ आव्यूह है, X, एक $n \times 1$ आव्यूह है और B, एक $m \times 1$ हैं।

आइए हम समुच्चय $K = \{X : AX = B, X \geq 0\}$ बनाएं। समुच्चय K को रैखिक प्रोग्रामन समस्या $AX = B$ के सभी सुसंगत हल का समुच्चय कहा जाता है।

आपको याद होगा कि आप इकाई 2 में समुच्चयों की अवमुखता (convexity) की अभिधारणा से परिचित हो चुके हैं। समुच्चय K की अवमुखता स्थापित करने के लिए मान लीजिए $X_1, X_2 \in K$, तब

$$AX_1 = B, X_1 \geq 0, AX_2 = B, X_2 \geq 0.$$

$\lambda x_1 + (1-\lambda) X_2$ लीजिए, जहाँ $0 \leq \lambda \leq 1$.

और $$A[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] = \lambda A X_1 + (1-\lambda) A X_2$$

$$= \lambda B + (1-\lambda) B = B$$

क्योंकि सभी $X_1, X_2, \lambda, 1-\lambda$ ऋणेतर हैं, इसलिए

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \geq 0.$$

इस तरह $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in K$, जहाँ $0 \leq \lambda \leq 1$.

जिससे यह पता चलता है कि समुच्चय K एक अवमुख समुच्चय हैं।

अब हम अगले परिणाम को एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत करेंगे पर इसकी उपपत्ति यहाँ हम नहीं देंगे।

मेय 2: यदि व्यवरोध-निकाय

$$AX = B$$
$$X \geq 0$$

ा एक सुसंगत हल हो, तो इस निकाय का एक आधारी सुसंगत हल भी होता है।

व हम एक उदाहरण लेकर एक सुसंगत हल को एक आधारी सुसंगत हल में रूपांतरित रने की विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

ाहरण 9: समीकरण-निकाय

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$
$$-5x_1 + 6x_2 + x_3 = 2$$

जिए। इसका एक सुसंगत हल $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ है। इस सुसंगत हल को आधा... गत हल में रूपांतरित कीजिए।

: ऊपर दिए गए समीकरण-निकाय को निम्नलिखित आव्यूह के रूप में रख सकते हैं

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

जहाँ $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ और } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

मान लीजिए A के स्तंभों को इस प्रकार प्रकट करते हैं

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ और } A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

यहाँ $\rho(A) = 2$, अतः दिए हुए समीकरण-निकाय का एक आधारी हल होता है जिसके दो से अधिक चर शून्येतर नहीं होते। और, स्तंभ सदिश A_1, A_2, A_3 रैखिकतः आश्रित (linearly dependent) हैं।

इसे स्वयं सत्यापित कीजिए।

अतः ऐसे अदिश (scalars) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, जिनमें सभी शून्य नही हैं, होते हैं, जिससे कि

$$A_1, \lambda_1 + A_2, \lambda_2 + A_3, \lambda_3 = 0$$

या

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \lambda_3 = 0$$

अर्थात्

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$
$$-5\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

यह तीन अज्ञात राशियों $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ वाले दो समीकरणों का निकाय हैं। आइए हम λ_5 में से एक को स्वेच्छया (arbitrarily) लें, मान लीजिए $\lambda_1 = 1$. तब हम

$$6\lambda_2 - \lambda_3 = -2$$
$$6\lambda_2 + \lambda_3 = 5$$

से λ_2 और λ_3 के मान अद्वितीयतः परिकलित कर सकते हैं। ऐसा करने पर हमें $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ और $\lambda_3 = 3$ प्राप्त होता है।

धन चरों की संख्या को कम करने के लिए जिस चर को शून्य करना होता है उसे प्रमेय 2 के अनुसार r लेकर प्राप्त किया जाता है। तदनुसार हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{x_r}{\lambda_i} = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} / \lambda_i \geq 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1/3}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}.$$

इस तरह, हम सदिश A_3 को हटा सकते हैं, जिसके लिए $\frac{x_3}{\lambda_3} - \frac{1}{3}$ और नए हल प्राप्त किए जा सकते हैं जिसमें दो से अधिक ऋणेतर चर नहीं होते। नए चरों के मान ये हैं :

$$\hat{x_1} = x_1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_3} x_3 = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\hat{x_2} = x_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} x_3 = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

स्पष्ट है कि इन शून्येतर चरों के संगत A के स्तंभ A_1 और A_2 रैखिकतः आश्रित हैं। अतः दिए हुए समीकरण-निकाय का एक आधारी सुसंगत हल यह होता है

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{8}{9}, x_3 = 0.$$

यदि A_3 के स्थान पर A_1 या A_2 का निराकरण किया जाए तो x_1 या x_2 शून्य हो जाते हैं। इन स्थितियों में आप यह देखेंगे कि नए हल सुसंगत नहीं हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 8: समीकरण-निकाय

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14.$$

लीजिए। इसका एक सुसंगत हल यह है

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1.$$

इस सुसंगत हल को आधारी सुसंगत हल मे रूपांतरित कीजिए।

प्रश्न 9: समीकरण-निकाय

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4$$

लीजिए। यहाँ (1, 1, 1, 0) एक सुसंगत हल है। एक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए।

प्रमेय 3: एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आधारी सुसंगत हल, सुसंगत हलों के अवमुख समुच्चय K के एक चरम बिन्दु के संगत होता है और विलोमतः K का प्रत्येक चरम बिन्दु रैखिक प्रोग्रामन समस्या के एक आधारी सुसंगत हल के संगत होता है।

यहाँ हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं। फिर भी इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने के लिए यहाँ हम इकाई 3 में बतायी गई निम्नलिखित गुणन मिश्रित समस्या पर विचार करेंगे:

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + 3x_3 \le 12$$
$$3x_1 + x_2 \le 8.$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

तापूरक चरों को जोड़ने पर व्यवरोध ये हो जाते हैं

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 8.$$

आधारी सुसंगत हल, मान लीजिए हल x_1, x_2, x_3, x_4 है; प्राप्त किए जा सकते हैं

$$x_1\ (0, 0, 12, 8), \quad x_2 = \left(\frac{8}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0\right)$$

2)

$$x_3 = (0, 4, 0, 4), \quad x_4 = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0\right)$$

अन्य दो आधारी हल $(0, 8, -12, 0)$, $(6, 0, 0, -10)$ सुसंगत नहीं हैं।

इस समस्या के ग्राफीय हल से आप यह देख सकते हैं कि सुसंगत हलों के अवमुख समुच्चय K के चरम विन्दु ये हैं

$$(0, 0), \left(\frac{8}{3}, 0\right), (0, 4), \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

इस तरह आप आधारी सुसंगत हलों और सुसंगत हल के अवमुख समुच्चय के चरम विन्दुओं के वीच की संगति (correspondence) स्पष्ट रूप से देख सकते हैं

x_1, $(0, 0)$ के संगत है

x_2, $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ के संगत है

x_3, $(0, 4)$ के संगत है

x_4, $\left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$ के संगत है।

और विलोमतः K का प्रत्येक विंदु कुछ आधारी सुसंगत हलों के संगत होता है।

अव हम एक और प्रमेय (उपपत्ति के विना) का कथन यहाँ दे रहे हैं।

प्रमेय 4: रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन का अधिकतम (या निम्नतम) मान, K के **एक चरम विन्दु पर होता है। दूसरे शव्दों में, हम निम्नलिखित कथन दे सकते हैं:**

उदाहरण 10: इकाई 1 के गुणन मिश्रित समस्या का प्रयोग करके प्रमेय 4 को स्पष्ट कीजिए।

हल: यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक इष्टतम हल हो, तो इष्टतम हल समस्या के कम से कम एक आधारी सुसंगत हल के वरावर होगा।

समान गुणन-मिश्रित समस्या लेकर इस प्रमेय को स्पष्ट करेंगे। इकाई 3 की ग्राफीय विधि से आप इसका इष्टतम हल

$$x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{20}{7}$$

और उद्देश्य फलन का इष्टतम मान $Z_{max} = \frac{148}{7} = 21.14$ प्राप्त कर सकते हैं।
यहाँ देख सकते हैं कि यह मान चरम विन्दु

$$x_4 = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0\right)$$

पर प्राप्त होता है।

अव आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 10: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या (इकाई 3 में वतायी गई आहार समस्या) को लेकर प्रमेय 3 और 4 को स्पष्ट कीजिए।

$$Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$
$$x_1, x_2 \quad \geq 0$$

5.4 सारांश

इस इकाई में आपको

1. रैखिक प्रोग्रामन समस्या के मानक रूप और विहित रूप से परिचित कराया गया है।
2. न्यूनतापूरक और/या आधिक्यपूरक चरों को जोड़कर रैखिक प्रोग्रामन समस्या के असमिका व्यवरोधों को समिका व्यवरोधों में रूपांतरित करना सीखाया गया है।
3. अप्रतिबंधित चर से परिचित कराया गया है।
4. (i) सुसंगत हल, (ii) आधारी हल, (iii) आधारी सुसंगत हल, (iv) इष्टतम हल से परिचित कराया गया है।
5. रैखिक प्रोग्रामन के कुछ महत्वपूर्ण प्रमेयों से परिचित कराया गया है जो एकधा फलन-विधि, जिस पर चर्चा अगली इकाई में की जाएगी, के विकास में उपयोगी होते हैं।

5.5 उत्तर/संकेत/हल

E1 $2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_3 \geq 0$
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 5, \quad x_4 \geq 0$

E 2 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 40, \quad x_3 \geq 0$
$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 50, \quad x_4 \geq 0$

E 3 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \quad x_3 \geq 0$
$2x_1 + 5x_2 - x_4 = 8, \quad x_4 \geq 0$
$x_1 - 3x_2 - x_5 = -6, \quad x_5 \geq 0$

E 4. यहाँ x_4 अप्रतिबंधित हैं। अतः

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

लीखिए, जहाँ $x_3', x_3'' \geq 0$. अब हल को पूरा कीजिए।

E 5 $Z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$

का निम्नतमीकरण कीजिए जबकि

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2$
$-2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$$4x_1 + 2x_2 - x_6 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

E 6 $(1, 0, 0), \left(0, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right), (1, 0, 0)$

((1, 0, 0) एक आधारी सुसंगत हल है।)

E 7 $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(-2, \frac{7}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{8}{3}, 0, 0, -\frac{7}{3}\right)$

E 8 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{2}$

E 9 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 0.$

E 10 आधारी सुसंगत हल हैं

$$X^1 = (0, 25, 30, 0), X^2 = (15, \frac{5}{2}, 0, 0),$$

$$X^3 = (20, 0, 0, 10)$$

[(0, 10, 0, – 30), (0, 0, – 40, – 50), (50/3, 0, – 20/3, 0) अनाधारी हैं]

चरम विन्दु $(0, 25), \left(15, \frac{5}{2}\right), (20, 0)$ हैं, $\left(15, \frac{5}{2}\right)$ पर इष्टतम हैं, जहाँ min Z = 51.25.

5.7. शब्दावली

अवमुख समुच्चय	convex set
आधारी सुसंगत हल	basic feasible solution
आधारी हल	basic solution
आधिक्य पूरक चर	surplus variable
इष्टतम हल	optimal solution
उद्देश्य फलन	objective function
एकधा कलन विधि	simplex algorithm
चरम विन्दु	extreme point
न्यूनता पूरक चर	slack variable
मानक रूप	standard form
रैखिक प्रोग्रामन	linear programming
विहित रूप	canonical form
व्यवरोध	constraint
व्युत्क्रमणीय आव्यूह	non-singular matrix
सुसंगत हल	feasible solution

इकाई 6 एकधा विधि

इकाई की रूपरेखा

यदि हाँ : तो पुनरावृत्तियों का निष्पादन रोक दीजिए

यदि नहीं : पुनरावृत्तियों का निष्पादन करते रहिए

एकधा विधि की कलन-विधि की निम्नलिखित रूपरेखा होती है :

(ii) एकधा कलन-विधि (Simplex Algorithm) की संरचना

एकधा कलन-विधि एक बीजीय प्रक्रिया है जिसमें इष्टतमत्व परीक्षण (optimality te: का एक नया अभिप्रयोग हल (trial solution) प्राप्त करने के लिए प्रत्येक पुनरावृत्ति एक समीकरण-निकाय लिया जाता है। प्रक्रिया के अनुसार हमें निम्नलिखित तीन चरण लागू करने होते हैं।

I. प्रारंभिक चरण : दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या के एक आधारी सुसंगत हल से प्र कीजिए।

II. पुनरावर्ती चरण (iterative step) : उत्तम आधारी सुसंगत हल की ओर चलिए।

III. इष्टतमत्व परीक्षण चरण (optimality test step) : वर्तमान आधारी सुसंगत ह इष्टतम है।

IV. यदि हाँ : तो पुनरावर्ती चरण का निष्पादन रोक दीजिए।

यदि नहीं : तो पुनरावर्ती चरण का निष्पादन जारी रखिए।

अब हम रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक उदाहरण लेकर व्यापक कलन-विधि की पूर्ण व्याख्या करेंगे।

उदाहरण 1 : उद्देश्य फलन $Z = 3x_1 + 5x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

हल: न्यूनतापूरक चर (slack variables) (इकाई 5) को जोड़ने पर समस्या यह हो जाती है : उद्देश्य फलन

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

जहां x_3, x_4, x_5 न्यूनतापूरक चर हैं।

ध्यान दीजिए कि यह समस्या ठीक वही है जो कि मूल समस्या है और इसका रूप बीजीय प्रकलन (algebraic manipulation) तथा सुसंगत हलों की पहचान के अधिक सुविधाजनक होता है । इस समस्या को हल करते समय व्यवरोध-समीकरणों

साथ ही उद्देश्य फलन के समीकरण का प्रकलन (manipulation) करना सरल होता है। अतः कलन-विधि के चरणों को लागू करने से पहले हम निम्नलिखित समीकरणों के रूप में समस्या को फिर से लिखते हैं :

उद्देश्य फलन Z का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$Z - 3x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \qquad (1)$$

$$0z + x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4 \qquad (2)$$

$$0z + 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 12 \qquad (3)$$

$$0z + 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 18 \qquad (4)$$

जहाँ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

अब कलन-विधि को लागू करने के लिए हमें निम्नलिखित संगत प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने होते हैं :

I. प्रारंभिक चरण : आधारी सुसंगत हल का चयन किस प्रकार किया जाता है?

II. पुनरावर्ती चरण : उत्तम आधारी सुसंगत हल का पता लगाते समय गति की दिशा का चयन किस प्रकार किया जाता है? कहाँ हमें रोकना होता है? नए हल को किस प्रकार पहचाना जाता है?

III. इष्टतमत्व परीक्षण : किस तरह मालूम किया जाता है कि अद्यतन आधारी सुसंगत हल इष्टतम हल है या नहीं?

चरण I के लिए हम किसी भी ऐसे आधारी सुसंगत हल से प्रारंभ कर सकते हैं जो हमारे लिए सुविधाजनक हो।

जब समस्या असमिका के रूप में होती है तो स्पष्ट विकल्प मूल बिन्दु (origin) होगा अर्थात इस स्थिति में सभी चरों को शून्य के बराबर लेना होता है अर्थात् $x_1 = 0, x_2 = 0$ प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल हैं। लेकिन, न्यूनतापूरक चर या आधिक्यपूरक चर को जोड़ लेने के बाद प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल के लिए हम मूल चरों अर्थात् x_1, x_2 को **अनाधारी चर** (non-basic variables) और न्यूनतापूरक चरों अर्थात् x_3, x_4, x_5 को आधारी चर मानते हैं।

इसे नीचे स्पष्ट रूप से समझाया गया है, जहाँ-जहाँ आधारी चरों को मोटे अक्षरों अर्थात् x_3, x_4, x_5 में दिखाया गया है :

$$x_1 + \mathbf{x_3} = 4$$

$$2x_2 + \mathbf{x_4} = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + \mathbf{x_5} = 18.$$

अनाधारी चरों x_1, x_2 को $x_1 = 0, x_2 = 0$ के रूप में लेने पर हमें आधारी चर $x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$ प्राप्त होते हैं। अतः प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल (0, 0, 4, 12, 18) होगा जिसके लिए $Z = 0$.

चरण II (पुनरावर्ती चरण) के लिए हम वर्तमान आधारी सुसंगत हल से अगले उत्तम आधारी सुसंगत हल की ओर जाते हैं। ऐसा करने के लिए एक अनाधारी चर (जिसे **प्रवेशी आधारी चर** (entering basic variable) कहा जाता है, के स्थान पर एक आधारी चर (जिसे निर्गमी आधारी चर (leaving basic variable) कहा जाता है) को प्रतिस्थापित किया जाता है और नए आधारी सुसंगत हल पहचाना जाता है। अब हम इस अवस्था में पहुँच गए हैं कि हम निम्नलिखित प्रश्न का हल ढूढ़ सकते हैं: **गति की दिशा का चयन किस प्रकार किया जाता है ?** दूसरे शब्दों में, **प्रवेशी आधारी चर का चयन करने का निकष (criterion) क्या है?**

क्योंकि हमारा लक्ष्य उद्देश्य फलत Z के मान में वृद्धि करना है, इसलिए वह चर जिसका कि Z वाले समीकरण में सबसे बड़ा गुणांक होता है, Z में वृद्धि करने वाला चर होगा। अतः इसे **प्रवेशी आधारी चर** मान लेना चाहिए। इस स्थिति में, प्रवेशी चर x_2 है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि एसा क्यों है? इस प्रश्न को हल कीजिए।

अब प्रश्न यह उठता है कि "किस प्रकार **निर्गमी आधारी चर** (leaving basic variable) को पहचाना जाता है? अनाधारी चर x_3, x_4, x_5 में से एक ऐसे चर को निर्गमी आधारी चर होने की संभावना होती है। हमें इन x_3, x_4, x_5 में से एक ऐसे चर का चयन करना है जिसके लिए प्रवेशी चर x_2 अधिकतम मान प्राप्त कर लेता है और x_3, x_4, x_5 में से कोई भी चर ऋणात्मक नहीं होता। इसे इस प्रकार किया जाता है:

आधारी चर	समीकरण	x_2 का अधिकतम मान
x_3 :	$x_1 + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - x_1$	: कोई सीमा नहीं
x_4 :	$2x_2 + x_4 = 12 \Rightarrow x_4 = 12 - 2x_2$	: $x_2 \le \frac{12}{2} = 6$
x_5 :	$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \Rightarrow x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$	: $x_2 \le \frac{18}{2} = 9$

क्योंकि x_4 (व्यवरोध $2x_2 \ge 12$ के लिए न्यूनतापूरक चर) से $x_2 = 6$ प्राप्त होता है जो कि प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् यह वह अधिकतम मान है जिस पर x_3, x_4, x_5 में से कोई भी चर ऋणात्मक नहीं होता, अतः x_4 ही वह चर है जिसे हम ढूंढ रहे हैं। अतः x_4, **निर्गमी आधारी चर** हैं। ध्यान दीजिए कि $x_2 = 9$, $x_2 = 6$ से बड़ा है, पर यदि हम $x_2 = 9$ लें, तो x_4 ऋणात्मक हो जाता है जिसे हम प्राप्त करना नहीं चाहते।

इस तरह, अब नए आधारी सुसगत हल में $x_4 = 0$ (अनाधारी) और $x_2 = 6$ आधारी शामिल हो जाएगा अर्थात् नया आधारी सुसंगत हल यह होगा

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 18$$

तदनुसार, हमें $z = 3.0 + 5.6 = 30$ प्राप्त होता है जिससे यह पता चलता है कि Z का मान, $Z = 0$ से अधिक हो गया है।

प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक कि आपको इष्टतम हल प्राप्त नहीं हो जाता।

अब इमें सारणी VI में सारणी-समुच्चय प्राप्त हो जाता है। अतः नया आधारी सुसंगत हल (2,6,2,0,0) होगा, जहाँ $Z = 36$. इष्टतमत्वं परीक्षण करने पर हम यह पाते हैं कि क्योंकि समीकरण (1) का कोई भी गुणांक ऋणात्मक नहीं है, इसलिए यह हल **इष्टतम** होगा। इस तरह कलन-विधि पूरी हो जाती है। अतः (न्यूनतापूरक चरों को जोड़ने से पहले) रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल $x_1 = 2, x_2 = 6$ है।

एकधा कलन-विधि का आव्यूह रूप

अभी तक हमने एकधा कलन-विधि की आधारी क्रियाविधि पर चर्चा की है। अब हम इस कलन-विधि पर कुछ गहराई से विचार करेंगे और विधि के आव्यूह रूप पर चर्चा करेंगे। चर्चा के दौरान आप यह देखेंगे कि कंप्यूटरों पर समस्याओं को हल प्राप्त करने में आव्यूह रूप अति सुविधाजनक रूप है।

व्यापक कलन-विधि पर विचार करने से पहले आइए हम निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को लेकर विधि को अच्छी तरह समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 2 उद्देश्य फलन

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

जैसा कि इकाई 5 में आप देख चुके हैं, किसी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल (यदि इसका अस्तित्व हो), सदा ही सुसंगत हलों के अवमुख समुच्चय (convex set) के एक चरम बिन्दु पर होता है। और, सुसंगत हल के अवमुख समुच्चय का प्रत्येक चरम बिन्दु एक आधारी सुसंगत हल के संगत होता है। अतः यहाँ हमें विभिन्न आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने होते हैं और इष्टतमत्व के लिए इनका परीक्षण करना होता है। जैसा कि इकाई 5 में बताया गया है आधारी हलों की संख्या $^3C_2 = 3$ होती हैं और हल ये होते हैं

I $\quad x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1 \quad$ जहाँ आधार आव्यूह $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

II $\quad x_1 = 0, x_2 = 5/3, x_3 = 2/3 \quad$ जहाँ आधार आव्यूह $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

III $\quad x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0 \quad$ जहाँ आधार आव्यूह $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि इन तीन आधारी हलों में पहला हल सुसंगत नहीं है, लेकिन अन्य दो हल सुसंगत हैं। प्राप्त किए गए इन दो आधारी सुसंगत हलों से आइए हम

एक हल लें। मानलिजिए यह हल, $x_1 = 0, x_2 = 5/3, x_3 = 2/3$ हैं, जहाँ आधार आव्यूह $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

आइए हम यह देखें कि यह हल इष्टतम है या नहीं ? इस आधारी सुसंगत हल के संगत उद्देश्य फलन का मान $Z = \frac{19}{3}$ प्राप्त होता है।

इस आधारी सुसंगत हल के लिए, तीन सदिशों

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ और } A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

में हमने A_2 और A_3 को आधारी हल माना है और संगत चर x_2 और x_3 आधारी चर हैं।

अनाधारी चर x_1 शून्य स्तर पर होता है। (अर्थात् इस आधारी सुसंगत हल के संगत इसका मान शून्य होता है।) यह देखने के लिए कि आधारी सुसंगत हल इष्टतम है या नहीं, हम सदिश A_1 के लिए (इस आधार में नहीं) एक राशि Δ_1 परिकलित करते हैं।

यहां हम निम्नलिखित सूत्र (जिस पर चर्चा हम बाद में करेंगे)

$$\Delta_j = Z_j - C_j = C_S S^{-1} A_j - C_j$$

को लागू करते हैं, जहाँ C_S, उद्देश्य फलन Z में आधारी सदिशों (x_2 और x_3) के गुणांकों को निरूपित करने वाला एक सदिश है।

A_1 के लिए, हमें यह प्राप्त है

$$\Delta_1 = C_S S^{-1} A_1 - C_1 = (3, 2) \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 = -10/3$$

अब, यदि $\Delta_1 \geq 0$, तो वर्तमान आधार सुसंगत हल इष्टतम होगा। लेकिन, क्योंकि $\Delta_1 < 0$, इसलिए आधार में सदिश A_1 जोड़कर हम उद्देश्य फलन Z के मान में सुधार कर सकते हैं। आइए अब हम अन्य आधारी सुसंगत हल की जांच करें जो आधार (इसमें A_3 को शामिल नहीं किया गया है) में A_1 को आविष्ट करता है अर्थात

$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$, जहाँ उद्देश्य फलन का मान $Z = 13$ और संगत आधार आव्यूह $S^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. अतः आइए हम यह फिर से देखें कि यह आधारी सुसंगत हल इष्टतम है या नहीं?

ऊपर की तरह की प्रक्रिया अपनाकर हम समान सूत्र से सदिश A_3 के लिए (इस आधार में नहीं) राशि Δ_3 परिकलित करते हैं अर्थात्

$$\Delta_3 = C_S (S^*)^{-1} A_3 - C_3 = (5, 3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 = 10 > 0$$

अब, क्योंकि $\Delta_3 > 0$, इसलिए वर्तमान हल इष्टतम होगा अर्थात् दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ होगा, जहाँ $Z = 13$ उद्देश्य फलन का इष्टतम मान है।

अब प्रश्न यह उठता है कि पुनरावर्ती चरण (iterative step) के लिए आपने क्या किया है? इसके लिए आप उद्देश्य फलन का एक उन्नत मान लेकर एक आधारी सुसंगत हल से एक उत्तम आधारी हल की ओर गए थे। इसमें आपने एक आधार सदिश (जिसे **निर्गमी सदिश (departing vector)** कहते हैं) के स्थान पर एक अनाधारी सदिश (जिसे **प्रवेशी सदिश (entering vector)**) प्रतिस्थापित किया था और एक नए आधारी सुसंगत हल पहचाना था। उस स्थिति में क्या होता है जबकि आधार में प्रविष्ट करने के लिए अनेक सदिश हों और इनमें से हमें उस सदिश को चुनना है जिसे आधार से हटाना है?

हमारा लक्ष्य कलन-विधि के प्रत्येक चरण पर (पुनरावृति) उद्देश्य फलन के मान में अधिकतम वृद्धि लाना है अर्थात् कलन-विधि की प्रत्येक पुनरावृत्ति पर एक सुव्यवस्थित प्रक्रिया होनी चाहिए जिसकी सहायता से हम यह जान सकें कि आधार में किस सदिश को प्रविष्ट करना है और किस सदिश को आधार से हटाना है और कब हमें कलन-विधि को रोक देना है।

अब हम व्यापक स्थिति पर चर्चा करेंगे और कलन-विधि प्राप्त करेंगे। इसके लिए हम इकाई 5 में बताए गए व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के मानक रूप पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे।

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

जहाँ A, एक $m \times n$ आव्यूह है, C, $1 \times n$ है, X, $n \times 1$ सदिश है और B, $m \times 1$ सदिश है। सुविधा के लिए आइए हम केवल अधिकतमीकरण समस्या पर विचार करें।

मानलीजिए $X = (X_S, 0)$, (5) का एक आधारी सुसंगत हल है जहाँ आधार आव्यूह $S = (b_1, b_2, ..., b_m)$, तब (इकाई 5 देखिए)

$SX_S = B$, अर्थात्

$$b_1 x_{S_1} + b_2 x_{S_2} + ... + b_m x_{S_m} = B \tag{6}$$

$$X_S = S^{-1} B \tag{7}$$

अतः उद्देश्य फलन का मान यह होगा

$$C_S X_S = Z_S$$

या $\quad C_{S_1}x_{S_1} + C_{S_2}x_{S_2} + C_{S_3}x_{S_3} + ... + C_{S_m}x_{S_m} = Z_S$ (8)

जहाँ $C_S = (C_{S_1}, C_{S_2}, ..., C_{S_m})$ अर्थात् (आधार आव्यूह S के संगत) , m – घटक पंक्ति सदिश C_S में आधारी चर के मूल्य होते हैं।

हम उद्देश्य फलत के उन्नत मान वाले एक अन्य आधारी सुसंगत हल के होने की संभावना की जांच करना चाहते हैं।

मानलीजिए A_j , आव्यूह A का एक स्तंभ है जिसे आधार आव्यूह B में शामिल नहीं किया गया है। तब A_j को S के m रैखिकतः स्वतंत्र स्तंभ सदिशों $b_1, b_2, ..., b_m$ के एक रैखिक संयोजन के रूप में लिख सकते हैं (वस्तुतः आव्यूह A के स्तंभ जिन्हें आधार S का घटक माना गया है) अर्थात् ऐसे अदिश $Y_{1j}, Y_{2j}, ..., Y_{mj}$ जिनमें सभी शून्य नहीं है, होते हैं जिससे कि

$$A_j = Y_{lj}\,b_1 + Y_{2j}\,b_2 + ... + Y_{mj}\,b_m \tag{9}$$

$$= (b_1, b_2, ..., b_m)\begin{bmatrix} y_{ij} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

$$= Sy_j, \text{ जहाँ } Y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{ij} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}, S = \left[b_1, b_2, ..., b_m\right]$$

या $\quad Y_j = S^{-1} A_j$

क्योंकि S, व्युत्क्रमणीय (non – singular) है। मानलीजिए (9) में समान r के लिए $Y_{rj} \neq 0$, पूरे (9) को Y_{rj} से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1}{Y_{rj}}A_j = \frac{Y_{ij}}{Y_{rj}}b_1 + \frac{Y_{2j}}{Y_{rj}}b_2 + ... + \frac{Y_{r-1j}}{Y_{rj}}b_{r-1} + b_r + \frac{Y_r + 1j}{Y_{rj}}b_r$$
$$+ 1 + ... + \frac{Y_{mj}}{Y_{rj}}b_r$$

या

$$b_r = -\frac{Y_1j}{Y_{rj}}b_1 - \frac{Y_2j}{Y_{rj}}b_2 - ... - \frac{Y_{r-1j}}{Y_{rj}}b_{r-1} + \frac{1}{Y_{rj}}A_j - \frac{Y_{r+ij}}{Y_{rj}}b_r + 1 - ...$$
$$- \frac{Y_{mj}}{Y_{rj}}b_m \tag{10}$$

मानलीजिए आधार में सदिश b_r (जो बाहर निकल जाता है) के स्थान पर A_j को निविष्ट किया गया है। तब हमें निम्नलिखित नया आधार प्राप्त होता है

$\hat{S} = (b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, A_j, b_{r+1}, \dots, b_m)$.

(10) से प्राप्त b_r के मान को (6) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$b_1 x_{S_1} + b_2 x_{S_2} + \dots + b_{r-1} x_{S_{r-1}} +$$

$$\left[\frac{-y_{ij}}{y_{rj}} b_1 - \frac{y_{2j}}{y_{rj}} b_2 \dots \frac{-y_{r-1j}}{y_{rj}} b_{r-1} + \frac{1}{y_{rj}} A_j \frac{-y_{(r+1)}^{\ j}}{y_{rj}} b_{r+1}\right.$$

$$\left.\dots \frac{-y_{mj}}{y_{rj}} b_m\right] x_{S_r} + b_{r+1} x_{S_{r+1}} + \dots + b_m x_{S_m} = B$$

$$\left(x_{S_1} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{S_r}\right) b_1 + \left(x_{S_2} - \frac{y_{2j}}{y_{rj}} x_{S_r}\right) b_2 + \dots + \left(x_{S_{r-1}} - \frac{y_{r-1}j}{y_{rj}} x_{S_{r-1}}\right) b_{r-1}$$

$$+\frac{x_{S_r}}{y_{rj}} A_j + \left(x_{S_{r+1}} - \frac{y_{r+1j}}{y_{rj}} x_{S_r}\right) b_{r+1} + \dots + \left(x_{S_{r+1}} - \frac{y_{r+j}}{y_{rj}} x_{S_r}\right) b_m = B \quad (11)$$

जिसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\hat{x}_{S_1} b_1 + \hat{x}_{S_2} b_2 + \dots + \hat{x}_{S_{r-1}} b_{r-1} + \hat{x}_{S_r} A_j + \hat{x}_{S_{r+1}} b_{r+1} + \dots + \hat{x}_{S_m} b_m = B \quad (12)$$

जहाँ
$$\hat{x}_{S_1} = x_{S_1} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{S_r}, \ i = 1, \dots, m; i \neq r$$

$$\hat{x}_{S_r} = \frac{x_{S_r}}{y_{r_1}}$$

$(\hat{x}_S, 0)$ को (5) का एक सुसंगत हल होने के लिए यह आवश्यक है कि

$$\hat{x}_{S_i} \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

अर्थात्
$$x_{S_i} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{S_r} \geq 0, \ i = 1, \dots, m, \ i \neq e$$

$$\frac{x_{S_r}}{y_{rj}} \geq 0 \quad (13)$$

अब, आधार से b_r के स्थान पर $Y_{rj} \neq 0$ प्रतिस्थापित कीजिए। यह चयन स्वेच्छ (arbitrary) नहीं है क्योंकि ऐसा माना गया है कि इससे प्रतिबंध (13) संतुष्ट हो जाता है। (13) से आप यह देख सकते हैं कि $x_{S_r} \neq 0$. इसलिए $y_{rj} > 0$ होगा। यदि $y_{ij} > 0$ और $y_{ij} \leq 0, i = 1, \dots, m_j \ i \neq r$, तो (13) स्वतः संतुष्ट हो जाता है।

लेकिन, यदि $y_{ij} > 0$ तो S के विभिन्न सदिशों b_i से जहां $y_{ij} > 0$ (सदिश b_r को आधार से हटाना है) ऐसे चयन करना होगा जिससे कि (13) सदा लागू होता हो।

यदि हम i के वे मान लें जिनके लिए $y_{ij} > 0$, तो प्रतिबंध (13) के लिए यह अपेक्षित हैं

$$\frac{x_{Si}}{y_{ij}} \geq \frac{x_{Sr}}{y_{ij}} \; i = 1, \ldots, m; i \neq r.$$

अतः मान लीजिए

$$\frac{x_{S_r}}{y_{rj}} = \min_{i} \left\{ \frac{x_{S_r}}{y_{rj}} \mid y_{ij} > 0 \right\} \tag{14}$$

यदि हम सदिश b_r लें जिसे (14) के अनुसार आधार S से बाहर निकालना है, तो (13) के प्रतिबंध सदा संतुष्ट होते हैं और उद्देश्य फलन का नया मान यह होता है

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{\hat{S}} &= C_{S_1} \hat{x}_{S_1} + \ldots + C_{S_j} \hat{x}_{S_r} + \ldots + C_S \hat{x}_{S_m} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} C_{S_i} \hat{x}_{S_i} + C_j \hat{x}_{S_r} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} C_{S_i} \left[x_{S_i} \frac{-y_{ij}}{y_{yj}} x_{S_r} \right] + C_j \frac{x_{S_r}}{y_{rj}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} C_{S_i} x_{S_i} + \frac{x_{S_r}}{y_{yj}} \left[C_j - \sum_{i=1}^{m} C_{S_i} y_{ij} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} C_{S_i} x_{S_i} + \frac{x_{S_r}}{y_{rj}} \left(C_j - \sum_{i=1}^{m} C_{S_i} y_{ij} \right) \\
&= Z_S + \frac{x_{S_r}}{y_{rj}} \left(C_j - Z_j \right) \quad \text{((9) का प्रयोग करने पर)}
\end{aligned}$$

या

$$\hat{Z}_S = Z_S + \theta \left(C_j - Z_j \right)$$

जहाँ $$Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{S_i} - Y_{ij}$$

$$= C_{S_i} y_{ij} + C_{S_2} y_{2j} + \ldots + C_{S_m} y_{mj} = C_S y_j$$

और $$\theta = \frac{x_{sr}}{y_{rj}}$$

अव, यदि $C_j - Z_j > 0$, तो स्पष्ट है कि $\hat{Z}_S > Z_S$ $(\because \theta > 0)$

इस तरह, आपने यह देखा है कि उद्देश्य फलन का नया मान मूल मान और राशि $\theta(C_j - Z_j)$ का जोड़ होता है। यहां $Z_j = C_S Y_j$ मूल आधारी हल हैं और C_j जोड़े गये नए चर x_j से संबंधित लागत हैं। अतः यदि आधार में प्रविष्टि के लिए एक

सदिश A_j लें, जहां $C_j - Z_j > 0$ (या $Z_j - C_j < 0$) और कम से कम एक $Y_{ij} - > 0$), तो हम एक नया आधारी सुसंगत हल प्राप्त कर सकते हैं, जहां $\hat{Z}_S > Z_S$.

आइए हम $Z_j - C_j$ को Δ_j से प्रकट करें, अर्थात् $\Delta_j = Z_j - C_j$.

वास्तविक अभिकलन करते समय आप यह देखेंगे कि A_j^S काफी अधिक संख्या में है जहाँ $\Delta_j < 0$. अब प्रश्न यह उठता है कि किस सदिश A_j को आधार में प्रविष्ट किया जाए? किसी भी पुनरावृत्ति पर उद्देश्य फलन के मान में अधिकतम वृद्धि लाने के लिए हमें आधार में प्रविष्ट करने के लिए उस सदिश A_j को लेना चाहिए जिसके संगत $-\Delta_j$ वृहत्तम हो (Δ_j का लघुत्तम मान हो) : उस सदिश को जिसे आधार में प्रविष्ट किया जाता है **प्रवेशी सदस्य** (entering vector) कहा जाता है जबकि उस सदिश को जिसे आधार से हटाया जाता है **निर्गमी सदिश** (departing vector) कहा जाता है।

इस तरह इस विधि का बार-बार प्रयोग एक आधारी सुसंगत हल से उद्देश्य फलन के उन्नत मान वाला एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए किया जाता है। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि ऐसा कोई भी सदिश न हो, जिसके लिए $\Delta_j < 0$ अर्थात् कलन-विधि तब समाप्त हो जाती है जबकि A के सभी स्तंभों A_j के लिए $\Delta_j \geq 0$ और तब हम यह कहते हैं कि हमें एक इष्टतम हल प्राप्त हो गया है क्योंकि उद्देश्य फलन के मान में और अधिक सुधार करना अब संभव नहीं है।

एकधा कलन-विधि के चरणों का संक्षिप्त विवरण देने के लिए आइए हम अपने सुसंगत **विहित रूप** (canonical form) में निम्नलिखित व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को लें।

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए , जबकि

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \qquad (15) \\
&\vdots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_n \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

I. पहले हम इस बात से सुनिश्चित हो लेते हैं कि सभी b_i, ($i = 1, 2, \ldots, m$) ऋणेतर हैं। यदि आवश्यक हो, तो हम असमिका को (-1) से गुणा कर देंगे जिससे कि $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ प्राप्त हो जाए। इसके बाद व्यवरोध से कम या के बराबर प्रत्येक असमिका को एक समिका में रूपांतरित करने के लिए हम न्यूनतापूरक चर (slack variables) जोड़ते हैं। प्रत्येक न्यूनतापूरक चर को मान शून्य दिया जाता है। तब समस्या को इस रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$
$$x_1, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \qquad (16)$$

अव आप यह देख सकते हैं कि न्यूनतापूरक चर x_{n+i} को i वीं असमिका, $i = 1, 2, \ldots, m$ में जोड़ा गया है। न्यूनतापूरक चर x_{n+i} के संगत गुणांक आव्यूह का स्तंभ e_i है जहाँ e_i, विमा m वाला मापक सदिश है जो i वीं स्थिति पर 1 है और अन्य सर्वत्र शून्य हैं ।

II आव्यूह संकेतन में आप समस्या को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$AX = B, X \geq 0$$

अव आप आव्यूह A को देखिए। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि इसमें न्यूनतापूरक चरों के स्तंभों के संगत एक $m \times m$ तत्समक आव्यूह (identity matrix) I_m है। एकधा विधि को लागू करने के लिए हम सदा ही इस तत्समक आव्यूह I_m का प्रयोग प्रारंभिक आधारी आव्यूह S, के रूप में करते हैं। यहाँ आप इकाई 5 को फिर से देख सकते हैं। यहां यह स्पष्ट है कि $x_1, x_2, \ldots, x_4$ अनाधारी चर हैं और $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, m आधारी चर हैं। अनाधारी चरों को शून्य के बरावर रखकर समस्या (16) का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह,

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$$

प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल है और $Z = 0$.

दूसरे शब्दों में, क्योंकि $S = I_m \Rightarrow S^{-1} = I_m$ इसलिए $X_S = B$ से प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है और $Z_S = 0$, उद्देश्य फलन का संगत मान होता है।

III. निम्न रूप में प्रारंभिक एकधा सारणी वनाइए:

	$c_j \rightarrow$	C_1	C_2	......	C_N	0	...		
C_S	चर	A_1	A_2	....	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m}	हल
0	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1		0	b_1
0	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0		.	.
.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.	.		.	.
0	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0		1	b_m
	Δ_j	Δ_1	Δ_2		Δ_n	Δ_{n+1}		Δ_{n+m}	$Z_S = 0$

यह सभी प्रासंगिक राशियों को प्रदर्शित करने वाली एक उपयोगी सारणी है। और आप जानते हैं कि इस प्रकार के संरूप को **सारणी-संरूप** (Tableau Format) कहा जाता है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि प्रत्येक पुनरावृत्ति पर एक नई सारणी बनानी होती है अर्थात् हर बार आधार में एक नया सदिश प्रविष्ट करना होता है।

एकधा सारणी की पहली पंक्ति में C_j के मान दिए गए हैं जहाँ C_j उद्देश्य फलन Z के x_j का गुणांक है। यहां यह दिखाया गया है कि आगे की सारणियों में भी C_j के मान समान बने रहेंगे। सारणी की दूसरी पंक्ति में सारणी के स्तंभ-शीर्षक (column headings) दिये गए हैं और ये स्तंभ शीर्षक भी एकधा कलन-विधि की आगे की सारणियों में अपरिवर्तित बने रहेंगे।

सारणी के पहले स्तंभ में C_S दिया गया है जो कि उद्देश्य फलन में आधारी चर के गुणांक है (अर्थात् आधार के चरों के संगत मूल्य) और दूसरे स्तंभ में आधार के चर दिए गए हैं।

सारणी के अंतिम स्तंभ में, जो शीर्षक हल के अंतर्गत है, आधारी चरों के वर्तमान मान दिए गए हैं और साथ ही इस सारणी द्वारा निर्धारित आधारी सुसंगत हल के उद्देश्य फलन का मान भी दिया गया है। शेष स्तंभों में, गुणांक आव्यूह A के सभी सदिश A_j दिए गए हैं। वास्तव में, इन स्तंभों में Y_j के मान दिए हुए है। पर आप यहाँ देख सकते है कि Y_j वही है जो कि A_j है, क्योंकि $Y_j = S^{-1} A_j$ और $S^{-1} = I_m$.

प्रत्येक स्तंभ की अंतिम प्रविष्टि में $\Delta_j = Z_j - C_r$ दिया हुआ है, जहाँ

$$Z_j = C_S Y_j = C_S S^{-1} A_j = C_S A_j, j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m,$$

इस तरह, यह स्पष्ट है कि सारणी के पहले स्तंभ C_S की प्रविष्टियों को स्तंभ A_j की संगत प्रविष्टियों को गुणा करके और इस तरह प्राप्त सभी गुणनफलों को जोड़ने पर Z_j प्राप्त होता है।

IV. इष्टतमत्व परीक्षण (optimality test)

यदि सभी $\Delta_j \geq 0$, तो दिया हुआ सुसंगत हल इष्टतम होता है।

जब एक या अधिक $\Delta_j < 0$, तब आधार से एक आधारी चर (सदिश) को हटाकर और इसके स्थान पर एक अनाधारी चर (सदिश) प्रतिस्थापित करके वर्तमान हल में और अधिक सुधार किया जा सकता है।

V. आधार में प्रविष्ट किए जाने वाले सदिश के निकष

$$\Delta_k = \min_j \Delta_j, \Delta_j < 0$$

को अभिकलित कीजिए।

सदिश A_k आधार में प्रविष्ट होता है (संगत चर x_k आधारी हो जाता है): यदि समस्या यह हो कि Δ_j के न्यूनतम मान के रूप में किस सदिश को लिया जाए, तो ऐसी स्थिति में

आधार में प्रविष्ट करने के लिए इन सदिशों में से किसी भी सदिश को लिया जा सकता है।

एक वार यह चुन लेने पर कि आधार में सदिश A_k को प्रविष्ट करना है, तव निम्नलिखित दो संभावनाओं में से किसी एक संभावना को आप स्वयं ज्ञात कर सकते हैं।

(i) आधार में प्रविष्टि के लिए (अर्थात् A_k अत्यधिक ऋणात्मक है) सदिश A_k के संगत $Y_{ik} \le 0 \; \forall \, i = 1, 2, \ldots, m.$ इसका यह अर्थ है कि इसका एक अपरिवद्ध हल (unbounded solution) होता है जिसमें आधार के सदिश और सदिश A_k होते हैं।

(ii) इसके विपरीत, A_j के संगत स्तंभ में कम से कम एक i के लिए $y_{ik} > 0$. इस स्थिति में एक नया आधारी सुसंगत हल प्राप्त किया जा सकता है जिसके उद्देश्य फलन का नया मान वर्तमान से वड़ा या इसके वरावर होता है।

सदिश A_k के, जो कि आधार में प्रविष्ट करता है, संगत स्तंभ को विशिष्ट स्तंभ (distinguished column) या महत्त्वपूर्ण स्तंभ (pivot column) कहा जाता है।

VI. आधार से हटाए जाने वाले सदिश का निकर्ा

$$\frac{x_{sr}}{y_{rk}} = \min_{i}\left\{\frac{x_{si}}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} \ge 0\right\}$$

की सहायता से आधार से हटाया जाने वाला सदिश r लिजिए। यदि न्यूनतम अनुपात के चयन के संबंध में यह समस्या उठती हो कि किस स्तंभ का चयन किया जाए, तो इनमें से किसी भी एक स्तंभ को हटाया जा सकता है और उसके स्थान पर A_k प्रतिस्थापित किया जा सकता है। ऊपर के अनुपातों में से न्यूनतम अनुपात की संगत पंक्ति r को विशिष्ट पंक्ति (distinguished row) या महत्त्वपूर्ण पंक्ति (pivot row) कहा जाता है और इस स्थिति में चर x_{n+r} अनाधारी हो जाता है।

विशिष्ट पंक्ति और विशिष्ट स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित अवयव y_{rk} (वास्तव में a_{rk}) को **विशिष्ट अवयव** (distinguished element) या महत्वपूर्ण अवयव (pivot element) कहा जाता है।

VII. नई सारणी का अभिकलनः अव यह आवश्यक हो गया है कि नई सारणी का अभिकलन किया जाए। क्योंकि आधार में सदिश A_k को प्रविष्ट किया गया है, इसलिए हम चाहेंगे कि नई सारणी में सदिश A_k एक मात्रक सदिश हो अर्थात् हम यह चाहेंगे कि A_k वाले स्तंभ की विशिष्ट या महत्त्वपूर्ण स्थिति पर एक हो और अन्य सभी स्थितियों पर शून्य हों। इसे इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है

(i) विशिष्ट पंक्ति 'r' को विशिष्ट अवयव $Y_{ik} > 0$ से भाग दीजिए

(ii) विशिष्ट स्तंभ के अन्य स्थानों पर शून्य प्राप्त करने के लिए नई r वीं पंक्ति के उपयुक्त गुणजों (multiples) को अन्य पंक्तियों से घटाइए अर्थात् आप यह अभिकलित कर सकते हैं

$$\hat{y_{ij}} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \quad i = 1, \ldots, m; i \neq r$$
$$y_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

और नए आधारी सुसंगत के लिए हमें यह प्राप्त होता है। चरण 4 पर आ जाइए और तब परिमित संख्या में चरणों को लागू करके आप इष्टतम आधारी सुसंगत हल (यदि इसका अस्तित्व है) प्राप्त कर लेंगे।

एकधा कलन-विधि को अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम गुणन मिश्रित समस्या लें जिसकी चर्चा हम इकाई 3 में ग्राफिय विधि से कर चुके हैं। इसका सुसंगत विहित रूप इस प्रकार प्राप्त होता है

उदाहरण 3

$$\mathbf{Z = 4x_1 + 5x_2}$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x_1 + 3x_2 \leq 12} \\ \mathbf{3x_1 + x_2 \leq 8} \\ \mathbf{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}\right. \qquad (17)$$

चरण I : सभी व्यवरोधों को समीकरणों में रूपांतरित कीजिए।

दो व्यवरोधों में न्यूनतापूरक चर x_3 और x_4 को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

चरण II : प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त कीजिए ।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि व्यवरोध निकाय (2) चार अज्ञात चरों x_1, x_2, x_3 और x_4 वाले दो समीकरणों का एक निकाय है और यह $AX = B$. $X \geq 0$ के रूप का है।

गुणांक आव्यूह A, सदिश X और सदिश B ये हैं

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

यहाँ आप यह देखते हैं कि A में चार स्तंभ हैं। आइए हम इन स्तंभों को इस प्रकार प्रकट करें

चरण VI : आधार से हटाए जाने वाले सदिश का चयन

$$\frac{x_{sr}}{y_{r2}} = \min_{i} \left\{ \frac{x_{si}}{y_{i2}} / y_{i2} > 0 \right\} \;,\; i = 3,4$$

$$= \min \left\{ \frac{12}{3}, \frac{8}{1} \right\} = \frac{12}{3} = 4 \text{ अर्थात } r = 3 \qquad (20)$$

अतः आधार से सदिश A_3 को हटाइए। इसे **निर्गमी चर** (डी. वी.) कहा जाता है।

सारणी की पहली पंक्ति को **महत्त्वपूर्ण पंक्ति** या विशेष पंक्ति कहा जाता है। **ध्यान दीजिए कि यहाँ भी यह समस्या खड़ी होती है, कि (20) के लिए किस सदिश का हटाया जाए। तब ऐसी स्थिति में इनमें से किसी-भी सदिश को आधार से हटाया जा सकता है। विशिष्ट पंक्ति और विशिष्ट स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित अवयव को विशिष्ट अवयव** या **महत्त्वपूर्ण अवयव** कहा जाता हैं। उदाहरण के लिए $\boxed{3}$ वर्तमान सारणी का एक विशिष्ट अवयव है।

चरण VII : नई सारणी का अभिकलन

अब क्योंकि आधार में सदिश A_2 प्रविष्ट कर गया है, इसलिए नई सारणी को अभिकलित करना आवश्यक हो गया है। नई सारणी में हम यह चाहेंगे कि सदिश A_2 एक मात्रक सदिश हों अर्थात् हम यह चाहेंगे कि विशिष्ट या महत्त्वपूर्ण स्थिति पर एक हों और उस स्तंभ के अन्य सभी स्थानों पर शून्य हों। इसे निम्नलिखित प्रक्रिया से प्राप्त किया जा सकता है।

(i) महत्त्वपूर्ण पंक्ति को महत्वपूर्ण अवयव से भाग दीजिए अर्थात् इस स्थिति मे पूरी पहली पंक्ति को $y_{32} = 3$ से भाग दीजिए।

(ii) महत्त्वपूर्ण स्तंभ के अन्य सभी स्थानों पर शून्य प्राप्त करने के लिए अन्य पंक्तियों (अर्थात् दूसरी पंक्ति) से नई पहली पंक्ति के उपयुक्त गुणज (multiple) को घटाइए अर्थात् इस स्थिति में हम यह अभिकलित कर सकते हैं

$$\hat{y_{4j}} = y_{4j} - \frac{y_{42}}{y_{12}} y_{1j} \,,\, j = 1, 2, 3, 4.$$

इस तरह, हमें नई दूसरी पंक्ति की प्रविष्टियाँ प्राप्त हो जाती हैं और नई सारणी यह होती हैं

	C_j	4	5	0	0	
C_S	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	हल
5	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	4
0	x_4	$\boxed{\frac{7}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	4→
	Δ_j	$-\frac{2}{3}$ ↑	0	$\frac{5}{3}$	0	20

अब हम चरण 4 पर आ जाते हैं और Δ_j अभिकलित करते हैं और आप यह देख सकते हैं कि $\Delta_1 = -\frac{2}{3}$ ऋणात्मक हैं, अतः स्तंभ A_1 आधार में प्रविष्ट करता है। हम इस सारणी के इस स्तंभ के नीचे ऊध्वर्वाधर तीर का प्रतीक ↑ लगा देते हैं जो यह प्रकट करता है कि A_1 प्रवेशी सदस्य या महत्त्पूर्ण सदिश हैं।

अब निर्गमी सदिश को मालूम करने के लिए हम निम्नलिखित को अभिकलित करते हैं

$$\frac{x_{sr}}{y_{r1}} = \min_{i} \left\{ \frac{x_{si}}{y_{i1}} \mid y_{i1} > 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{4}{2/3}, \frac{4}{7/3} \right\} = \min \left\{ 6, \frac{12}{7} \right\} = \frac{12}{7}.$$

अत : $r = 4$ और $y_{41} = \frac{7}{3}$

महत्त्वपूर्ण अवयव हैं। हम निर्गमी चर को क्षैतिज तीर ← से प्रकट करते हैं, जैसा कि सारणी II में दिखाया गया है। इसी प्रक्रिया को अपना कर हम निम्नलिखित नई सारणी प्राप्त करते हैं :

	C_j	4	5	0	0	
C_S	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	हल
5	x_2	0	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{20}{7}$
4	x_1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\underline{12}$
	Δ_j	0	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{148}{7}$

क्योंकि सभी $\Delta_j \geq 0$, इसलिए उद्देश्य फलन के मान में और अधिक सुधार करने की गुंजाइश नहीं है और वर्तमान हल इष्टतम होता है। हल यह है

$$x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{20}{7}, x_3 = 0, x_4 = 0 \text{ और } \max Z = \frac{148}{7}$$

यह वही है जो कि आपने इकाई 3 में ग्राफिय विधि से प्राप्त किया था।

प्रश्न 1: संगत चरणों को वताते हुए एकधा कलन-विधि से निम्नलिखित प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए:

(क) $Z = 2x_1 + 3x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$x_1 + x_2 \le 1$
$3x_1 + x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$

(ख) $Z = 2x_1 + 3x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$5x_1 + x_2 \le 7$
$3x_1 + 2x_2 \le 11$
$x_1 + x_2 \ge 0$

प्रश्न 2: एकधा कलन-विधि से निम्नलिखित समस्याओं को हल कीजिए :

(क) $Z = 6x_1 - 2x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$4x_1 + x_2 \le 6$
$2x_1 + 4x_2 \le 20$
$x_1, x_2 \ge 0$

(ख) $Z = 5x_1 + 3x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$3x_1 + 5x_2 \le 15$
$5x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_1, x_2 \ge 0$

प्रश्न 3: सारणी के केवल पुनरावर्ती चरणों का वताते हुए एकधा विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए:

(क) $Z = 4x_1 + 7x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$2x_1 + x_2 \le 10$
$2x_1 + 4x_2 \le 20$
$x_1, x_2 \ge 0$

(ख) $Z = 11x_1 + 13x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$6x_1 + 4x_2 \le 3$
$7x_1 + x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

प्रश्न 4: निम्नलिखित समस्याओं को हल कीजिए:

(क) $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_2$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 7$
$-2x_1 + 4x_2 \le 12$
$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$
$x_1, x_2, x_3, \ge 0$

(ख) $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4$
$2x_1 + x_2 \le 3$
$x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

प्रश्न 5: एकधा विधि से निम्नलिखित समस्याओं को हल कीजिए:

(क) $Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5$
$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(ख) $Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4$
का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि
$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 \le 5$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \le 6$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

प्रश्न 6: (क) एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का पहला सारणी-संरूप (tableau format) का अपूर्ण रूप नीचे दिया गया है:

C_S	C_j आधार में चर	… A_1	… A_2	… A_3	… A_4	हल
0	x_3	3	1	1	0	
0	x_4	2	2	0	1	
	Δ_j	−4	−1	0	0	

(i) पहली पंक्ति C_j, $j = 1, 2, 3, 4$ को पूरा कीजिए।

(ii) इसकी संगत रैखिक प्रोग्रामन समस्या लीखिए।

(ख) एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या की एक मध्यवर्ती एकधा सारणी नीचे दी गई है

C_S	C_j चर	0 A_1	−1 A_2	3 A_3	0 A_4	−2 A_5	0 A_6	हल
0	x_1	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0	10
3	x_3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	3
0	x_6	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1	1
	Δ_j							

(i) Δ_j ; $j = 1, 2, \ldots, 6$ परिकलित कीजिए।

(ii) क्या यह सारणी एक इष्टतम आधारी सुसंगत हल के संगत है या नहीं

(iii) प्रवेशी और निर्गमी सदस्य ज्ञात कीजिए

(iv) आधारी अवयव ज्ञात कीजिए

(v) अगली सारणी लीखिए।

6.3 कृत्रिम चर विधियाँ

अभी तक हमने इस बात पर चर्चा की है कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को, जिसमें उद्देश्य फलन अधिकतमीकरण रूप का था और सभी व्यवरोध से कम या के बराबर प्रकार के थे, एकधा विधि से किस प्रकार हल किया जाता है। यदि समस्याएं ऐसी हों, जिनमें व्यवरोध ' ≥ ' प्रकार या ' = ' प्रकार का हों, उद्देश्य फलन में न्यूनतमीकरण फलन (maximization function) के रूप का हो, तो क्या होगा, अर्थात् मानलीजिए रैखिक प्रोग्रासन समस्या इस रूप की है।

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m$$
$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n > 0.$$

इकाई 5 में आप यह पढ़ चुके हैं कि एक न्यूनतमीकरण समस्या को अधिकतमीकरण समस्या में किस प्रकार बदला जाता है और वहाँ विस्तार में यह भी पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार अधिक्यपूरक चरों (surplus variables) को जोड़कर '≥' प्रकार वाले व्यवरोधों को समीकरणों में बदला जाता है। इस तरह, समस्या को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$-Z = -C_1 x_1 - C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n - x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - x_{n+2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n - x_{m+m} = b_m$$
$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

जहाँ $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ आधिक्यपूरक चर हैं। $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ लेकर आप इस समस्या का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त कर सकते हैं। इस तरह, हमें

$x_{n+1} = -b_1, x_{n+2} = -b_2, \ldots, x_{n+m} = -b_m$ प्राप्त होते हैं।

अब, यह प्रश्न उठता है: **यह आधारी हल सुसंगत नहीं हैं, और यह ऋणेतर प्रतिबंधों का उल्लंघन करता है तब इस प्रकार की समस्या को हल करने के लिए आप एकधा विधि को किस प्रकार लागू कर सकते हैं?** इसके लिए इस प्रकार की समस्या में थोड़ा बहुत परिवर्तन करना आवश्यक होता है जिस पर चर्चा हम इस भाग में करेंगे।

जैसा कि इकाई 5 में बताया गया है कि (≥) या (=) व्यवरोधों वाली समस्याओं के लिए न्यूनतापूरक चरों से प्रारंभिक सुसंगत हल प्रात नहीं हो सकता। ऐसी स्थितियों में प्रारंभिक सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए हम **"कृत्रिम चर"** (artificial variables) विधियों को लागू करते हैं। इन विधियों को कृत्रिम चर विधि इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इन विधियों में कुछ उन चरों का प्रयोग करते हैं जो काल्पनिक होते हैं और जिनका कोई भौतिक अर्थ नहीं है। ज्योंहि ये चर अनाधारी हो जाते हैं त्योंहिं एकधा सारणी से इनका

निराकरण कर दिया जाता है। सामान्यतः दो विधियों को लागू किया जाता है जिनमें कृत्रिम चरों का प्रयोग किया जाता है।

इन विधियों को **"M–तकनीक"** या **"पेनाल्टी विधि"** और **"द्विचरण विधि"** (Two phased Mehtod) कहा जाता है। इस भाग में हम **"द्विचरण विधि"** पर चर्चा करेंगे क्योंकि M-विधि की तुलना में इस विधि पर चर्चा करना अधिक सुविधाजनक होता है।

"द्विचरण विधि" पर चर्चा करने के लिए यहाँ हम इकाई 5 में बताए गए रैखिक प्रोग्रामन समस्या का मानक रूप लेंगे अर्थात्

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 \, a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \quad (21)$$

यहाँ आप यह मान सकते हैं कि आप न्यूनतापूरक चर या आधिक्यपूरक चर जोड़ चुके हैं। यदि इस समस्या के गुणांक आव्यूह में कोई तत्समक आव्यूह न हो, तो एक कठिन स्थिति में आप स्वयं इसे प्राप्त कर सकते हैं। **तब प्रश्न उठता है कि (21) का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल किस प्रकार प्राप्त किया जाता है।**

आप यह जानते हैं कि एक प्रारंभिक आधार आव्यूह बनाने के लिए एक तत्समक आव्यूह का होना आवश्यक होता है। अतः समस्या (21) के मूल व्यवरोध समुच्चय लेने के स्थान पर हम एक नया व्यवरोध समुच्चय लेते हैं

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_1^a = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots a_{2n} x_n + x_2^a = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_m^a = b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_1^a \geq 0, \ldots, x_m^a \geq 0 \end{array} \quad (22)$$

अर्थात् प्रत्येक **M**–व्यवरोधों में से प्रत्येक व्यवरोध में हम M–कृत्रिम चरों, $x_1^a, x_2^a, \ldots, x_m^a$. (यहाँ मुर्धाक्षर 'a' कृत्रिम को प्रकट करता है) इन में एक-एक को जोड़ते हैं जहाँ स्तंभ सदिश इन चरों $b_i, i = 1, 2, \ldots, m$ के संगत है।

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि ऐसा करने से हमें क्या लाभ होता है ? इसका उत्तर यही है कि जिस लाभ की अपेक्षा हम कर रहे थे वह हमें प्राप्त हो जाता है अर्थात् (22) में एक प्रारंभिक आधारी तत्समक आव्यूह आ जाता है और तब आप निकाय (22) का निम्नलिखित प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल तुरंत प्राप्त कर सकते हैं

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

और

$$x_1^a = b_1, x_2^a = b_2, \ldots, x_m^a = b_m.$$

यह हल सुसंगत है, क्योंकि $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

हमारा अंतिम लक्ष्य निकाय (21) का एक ऐसा आधारी सुसंगत हल प्राप्त करना है जिसमें सभी कृत्रिम चर x_i^a, $i = 1, 2, \ldots, m$ शून्य हों, अर्थात् हल मूल चरों x_j, $j = 1, \ldots, n$ के पदों में हों। इसके लिए हमें फिर से एकधा विधि लागू करना होता है जिसमें सामान्य चरणशः प्रक्रिया (step-by-step procedure) से तत्समक आधारी आव्यूह में मूल स्तंभ A_j को निविष्ट करना होता है और इस तरह आधारी आव्यूह से कृत्रिम चर को हटाना होता है । इस तरह आपको मूल चरों के पदों में (21) का एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त हो जाएगा।

व्यवरोध-निकाय के समिका-व्यवरोधों में कृत्रिम चरों को जोड़ते समय हमें यह बात ध्यान में रखनी होती है कि हमें केवल उन्हीं व्यवरोधों में कृत्रिम चरों को जोड़ने की आवश्यकता होती हैं जिनके संगत मूल निकाय में कोई मात्रक सदिश e_i नहीं होता।

कृत्रिम चरों को लागू करने के संबंध में अन्य गणितज्ञों के साथ डांजिग ने एकधा विधि में थोड़ा-बहुत परिवर्तन करने का सुझाव दिया और इस विधि को द्विचरण विधि कहा । द्विचरण विधि में हम दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को दो भागों में हल करते हैं:

सबसे पहले यानी चरण I में हम कृत्रिम चरों को शून्य तक ले जाते हैं। चरण II में हम प्रत्येक कृत्रिम चर को मूल्य - 1 देते हैं और प्रत्येक मूल चर को मूल्य 0 देते हैं। इस चरण में, वास्तविक उद्देश्य फलन लेने के स्थान पर हम फलन

$$Z^0 = -x_1^a - x_2^a - \ldots - x_m^a.$$

का अधिकतमीकरण करते हैं, जहाँ x_i^a, i वाँ कृत्रिम चर हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लेकर कृत्रिम चरों को लागू करने की द्विचरण विधि को समझने का प्रयास करें ।

उदाहरण 4

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$6x_1 + 7x_2 \geq 11$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

हल :

हम उद्देश्य फलन को अधिकतमीकरण फलन में बदलते हैं और व्यवरोधों को समीकरणों में बदलने के लिए आधिक्यपूरक चर x_3 और x_4 जोड़ते हैं और तब समस्या यह हो जाती हैं

$$-Z = -3x_1 - 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 11$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_4 = 13$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

यदि, आप इस समस्या के व्यवरोध समीकरणों के गुणांक आव्यूह

$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ को देखें, तो आप पाएंगे कि इस गुणांक आव्यूह का कोई तत्समक आव्यूह नहीं हैं, इसलिए आपको प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त नहीं हो पाता। अतः दो व्यवरोधों में हम दो कृत्रिम चर जोड़ते हैं और तब हमें यह प्राप्त होता है

$$6x_1 + 7x_2 - x_3 + x_1^a = 11$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + x_2^a = 13$$

$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \quad , \quad x_1^a, x_2^a \geq 0$$

द्विचरण विधि के चरण I में हम **एकधा विधि** से हम निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करते हैं

$$Z_0^0 = -x_1^a - x_2^a$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$6x_1 + 7x_2 - x_3 + x_1^a = 11$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + x_2^a = 13$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

इस समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल यह है

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_1^a = 11, x_2^a = 13 \text{ और } Z^0 = -24.$$

समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

C_S^0	C_j^0 आधार में चर	0 A_1	0 A_2	0 A_3	0 A_4	−1 A_1^a	−1 A_2^a	हल
−1	x_1^a	$\boxed{6}$	7	−1	0	1	0	11
−1	x_2^a	4	2	0	−1	0	1	13
	Δ_j^0	−10	−9	1	1	0	0	−24

जहाँ C_j^0, Z^0 में x_j का गुणांक है और C_S^0, Z^0 में आधारी चर के गुणांकों को प्रकट करने वाला स्तंभ है। ऋणतम $\Delta_j^0, -10$ हैं। अतः आधार में स्तंभ A_1 प्रवेश करता है। निर्गमी सदिश के लिए हम न्यूनतम $\left\{\frac{11}{6}, \frac{13}{4}\right\} = \frac{11}{6}$ लेते हैं, क्योंकि स्तंभ A_1 की दोनों प्रविष्टियाँ धनात्मक हैं।

स्पष्ट है कि कृत्रिम चर x_1^a के संगत सदिश A_1^a को आधार से हटा दिया गया है और सामान्यतः हमें निम्नलिखित नयी सारणी प्राप्त होती है जिसमें (6) आधार अवयव हैं

C_S^0	C_j^0 आधार में चर	0 A_1	0 A_2	0 A_3	0 A_4	−1 A_1^a	−1 A_1^a	हल
0	x_1	1	$+\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{11}{6}$
−1	x_2^a	0	$\frac{16}{6}$	$\boxed{\frac{4}{6}}$	−1	$-\frac{4}{6}$	1	$\frac{34}{6} \rightarrow$
	Δ_j^0	0	$\frac{16}{6}$	$-\frac{4}{6}$ ↑	1	$\frac{10}{6}$	0	$-\frac{34}{6}$

अब, ऋणतम $\Delta_j^0, -\frac{4}{6}$ हैं। आधार में स्तंभ A_3 प्रविष्ट करता है। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि स्तंभ A_3 की केवल प्रविष्टि धनात्मक हैं। इसलिए आधार से संगत सदिश A_2^a को हटाना होता है और और कृत्रिम चर x_2^a अनाधारी हो जाता हैं और तब $\boxed{\frac{4}{6}}$, आधार अवयव होता है। अब हमें निम्नलिखित नई सारणी प्राप्त होती है

C_S^0	C_j^0 आधार में चर	0 A_1	0 A_2	0 A_3	0 A_4	−1 A_1^a	−1 A_2^a	हल
0	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$
0	x_3	0	−4	1	$-\frac{3}{2}$	−1	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{2}$
	Δ_j^0	0	0	0	0	1	1	

क्योंकि सभी $\Delta_j^0 \geq 0$, इसलिए हमें चरण I का इष्टतम प्राप्त हो जाता है। अब हम अंतिम दो स्तंभों अर्थात् कृत्रिम सदिशों के संगत स्तंभों की उपेक्षा कर देते हैं, क्योंकि अब हमें मूल चरों के पदों में एक आधारी हल प्राप्त हो गया है। अब चरण II प्रारंभ होता है और हमें निम्नलिखित उद्देश्य फलन लेना होता है

$$-Z = 3x_1 - 5x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए और चरण II की प्रारंभिक सारणी, चरण I की अंतिम सारणी होती है जिसमें कृत्रिम सदिशों के स्तंभ नहीं होते। अतः अब हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है

C_S	C_1 चर	-3 A_1	-5 A_2	0 A_3	0 A_4	हल
-3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$
0	x_3	0	-4	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{17}{2}$
	Δ_j	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{39}{4}$

क्योंकि $\Delta_j \geq 0$, इसलिए हमें चरण II का भी इष्टतम प्राप्त हो जाता है। इष्टतम हल यह होता है

$$x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{17}{2}, x_4 = 0 \quad \text{अधिकतम } (-Z) = \frac{-39}{4}.$$

इसलिए, न्यूनतम $Z = \frac{39}{4}$.

उदाहरण 5 : (मिश्रित व्यवरोध)

$$\mathbf{Z = 3x_1 - x_2}$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

हलः क्योंकि सबसे पहले हम सभी व्यवरोधों को समीकरणों में बदलते हैं, इसलिए हम पहले व्यवरोध में आधिक्यपूरक चर x_3 जोड़ते हैं और अन्य दो व्यवरोधों में न्यूनतापूरक चर x_4 और x_5 जोड़ते हैं और समस्या यह हो जाती है

$$Z = 3x_1 - x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 3$$
$$x_2 + x_5 = 4$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

इस समस्या का गुणांक आव्यूह A यह होता है

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इसमें ऐसा कोई भी 3×3 तत्समकारी आव्यूह (unit matrix) नहीं है, जिसे प्रारंभिक आधार आव्यूह माना जा सके। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि A में दो तत्समकारी आव्यूह है। अतः हमें केवल पहले व्यवरोध में कृत्रिम चर x_1^a जोड़ना होता है और चरण I की निम्नलिखित समस्या को हल करना होता है

चरण I

$$Z^0 = -x_1^a$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, \ldots, x_5, x_1^a \geq 0$$

स्पष्ट है कि प्रारंभिक हल यह होगा

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_1^a = 2, x_1 = 3, x_5 = 4, \text{ और } Z^0 = -2$$

अब हम समस्या का सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j^0	0	0	0	0	0	−1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	हल
−1	x_1^9	$\boxed{2}$	1	−1	0	0	1	2 →
0	x_5	1	3	0	1	0	0	3
0	x_5	0	1	0	0	1	0	4
	Δ_j^0	−2 ↑	−1	1	0	0	0	

क्योंकि ऋणतम Δ_j^0, −2 है, इसलिए आधार में स्तंभ A_1 प्रविष्ट करता है। अब, क्योंकि स्तंभ A_1 की केवल दो प्रविष्टियाँ धनात्मक है, इसलिए यह मालूम करने के लिए कि आधार से किस सदिश को हटाया जाए, हम $\min\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{1}\right) = \frac{2}{2}$. इससे यह अर्थ

निकलता है कि आधार से A_1^a को हटाना है और $\boxed{2}$ आधार अवयव हैं। अब हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त है।

C_S^0	C_j / आधार में चर	A_1 (0)	A_2 (0)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (−1)	A_i^a	हल
3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	x_4	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	2
0	x_5	0	1	0	0	1	0	4
	Δ_j^0	0	0	0	0	1	1	0

क्योंकि सभी $\Delta_j^0 \geq 0$, इसलिए हमें चरण I के लिए इष्टतम प्राप्त है अर्थात् चरण I समाप्त हो जाता है और हमें मूल समस्या का प्रारंभिक आधारी हल प्राप्त हो जाता है। ध्यान दीजिए कि हम कृत्रिम चर x_1^a के संगत स्तंभ A_1^a की उपेक्षा कर देते हैं और चरण II पर आ जाते हैं।

चरण II

$$Z = 3x_1 - x_2$$

का अधिकतमीकरण करने की प्रारंभिक सारणी यह है

C_S^0	C_j / आधार में चर	A_1 (3)	A_2 (−1)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (0)	हल
3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	[illegible]
0	x_4	0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	2 →
0	x_5	0	1	0	0	1	4
	Δ_j	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$ ↑	0	[illegible]	

क्योंकि ऋणतम $\Delta_j - \frac{3}{2}$ है इसलिए आधार में स्तंभ A_3 प्रविष्ट करता है। अब, क्योंकि इस स्तंभ की धनात्मक प्रविष्टि केवल $\boxed{\frac{1}{2}}$ है, इसलिए आधार से संगत चर x_4 को हटाना होता है और आधार अवयव $\boxed{\frac{1}{2}}$ होता है। इस तरह, अगली सारणी यह होगी

C_j		3	−1	0	0	0	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	हल
3	x_1	1	3	0	1	0	3
0	x_3	0	5	1	2	0	4
0	x_5	0	1	0	0	1	4
	Δ_j^0	0	10	0	3	0	9

क्योंकि सभी $\Delta_j \geq 0$, इसलिए वर्तमान हल इष्टतम हैं जो यह है

$$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 4, x_1 = 0, x_5 = 4$$

और अधिकतम $Z = 9$

ध्यान दीजिए कि चरण I के अंत में, जबकि इष्टतम - प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है या $Z^0 = 0$, तो वहाँ तीन सभावनाएँ हो सकती हैं :

– **अधिकतम $Z^0 < 0$: एक या अधिक कृत्रिम सदिश, आधार के एक धनात्मक स्तर पर आ जाते हैं : मूल समस्या का कोई भी सुसंगत हल नहीं होता।**

– **अधिकतम $Z^0 = 0$: कोई भी कृत्रिम सदिश आधार में नहीं आते। हमें मूल समस्या का एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त हो जाता है।**

– **अधिकतम $Z^0 > 0$: एक या अधिक कृत्रिम सदिश आधार के शून्य स्तर पर बने रहते हैं। हमें मूल समस्या का एक सुसंगत हल प्राप्त हो जाता है।**

आइए हम एक उदाहरण लेकर इसे समझने का प्रयास करें :

उदाहरण 6

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 14$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

आइए पहले हम असमिकाओं को समीकरणों में बदल दें अर्थात् हम पहले व्यवरोध में न्यूनतापूरक चर x_3 जोड़ते हैं, और अन्य दो व्यवरोधों में आधिक्यपूरक चर x_4 और x_5 जोड़ते हैं तब व्यवरोध समुच्चय यह हो जाता है

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 14$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

यदि हम $x_1 = 0, x_2 = 0$ लें, तो हमें $x_3 = 5, x_4 = -8, x_5 = -14$ प्राप्त होगा।

इसलिए प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात नहीं होता ।

हमें अंतिम दो व्यवरोधों और चरण–I में कृत्रिम चर जोड़ना होता है

$$Z^0 = -x_1^a - x_2^a$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_1^a = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_2^a = 14$$

$$x_1, \ldots, x_5, x_1^a, x_2^a \geq 0.$$

स्पष्ट है कि मूल हल यह होगा

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0 ; x_3 = 5, x_1^a = 8, x_2^a = 14, Z^0 = -22.$$

हम समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j^0	0	0	0	0	0	−1	−1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	हल
0	x_3	1	1	1	0	0	0	0	5
−1	x_1^a	1	$\boxed{2}$	0	−1	0	1	0	8 →
−1	x_2^a	3	2	0	0	−1	0	1	14
	Δ_j^0	−4	−4 ↑	0	1	1	0	0	−22

ऋणतम $\Delta_j^0 = -4$ और अव आय के सामने कुछ विकल्प आ जाते हैं। इसलिए आधार में प्रविष्ट करने के लिए विकल्प रूप में प्राप्त दो सदिशों A_1 और A_2 में से किसी एक को ले सकते हैं। मानलीजिए हम आधार में प्रविष्ट करने के लिए A_2 लेते हैं। तब आधार से हटाने के लिए हम सदिश

$$\text{न्यूनतम} \quad \left\{\frac{5}{1}, \frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right\} = \frac{8}{2}$$

लेते हैं। अतः आधार से कृत्रिम सदिश A_1^a को हटाना होता है और $\boxed{2}$ आधार अवयव होता है। अगली सारणी यह है

	C_j^0	0	0	0	0	0	–1	–1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	हल
0	x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
0	x_2	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	4
–1	x_2^a	2	0	0	1	–1	–1	1	6
	Δ_j^0	–2 ↑	0	0	–1	1	2	0	–6

ऋणतम $\Delta_j^0 = -2$, इसलिए आधार में स्तंभ A_1 प्रविष्ट करता है और हम

$$\text{न्यूनतम}\left\{\frac{1}{1/2}, \frac{4}{1/2}, \frac{6}{2}\right\} = \min\{2, 8, 3\} = 2$$

लेते हैं।

इस तरह आधार से स्तंभ A_3 को हटाना होता है और $\boxed{\frac{1}{2}}$ आधार अवयव होता है।
अगली सारणी यह होती है

	C_j^0	0	0	0	0	0	–1	–1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	हल
0	x_3	1	0	2	1	0	–1	0	2
0	x_2	0	1	–1	–1	0	1	0	3
–1	x_2^a	0	0	–4	–1	–1	1	1	2
	Δ_j^0	0	0	4	1	1	0		–2

क्योंकि सभी $\Delta_j^0 \geq 0$, इसलिए इष्टतमत्व निकष्ट (optimality criterion) संतुष्ट हो जाता है, लेकिन $Z^0 < 0$ और एक कृत्रिम चर x_2^a आधार के एक धनात्मक स्तर पर पुनः रहता है। अतः मूल समस्या का कोई सुसंगत हल नहीं है।

उदाहरण 7 (अपरिबद्ध हल वाली स्थिति)

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

हलः दो समिका व्यवरोधों और चरण I में कृत्रिम चर x_1^a और x_a^2 जोड़कर हम निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करते हैं

$$Z^0 = -x_1^a - x_2^a$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_1^a = 8$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_2^a = 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

प्रारंभिक हल यह है :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_1^a = 8, x_2^a = 7, Z^0 = -15$$

अतः समस्या का सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j^0	0	0	0	−1	−1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_1^a	A_2^a	हल
−1	x_1^a	−3	2	2	1	0	8
1	x_2^a	−3	$\boxed{4}$	1	0	1	7→
	Δ_j^0	6	−6 ↑	−3	0	0	−15

ऋणतम $\Delta_j^0 = -6$, आधार में स्तंभ A_2 प्रविष्ट करता है और हम

न्यूनतम $\left\{\frac{8}{7}, \frac{7}{4}\right\} = \frac{7}{4}$

लेते हैं अर्थात् कृत्रिम चर x_2^a के संगत स्तंभ A_2^a को आधार से हटाना होता हैं और आधार अवयव $\boxed{4}$ होता है। अगली सारणी यह होती है

	C_j^0	0	0	0	−1	−1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_1^a	A_2^a	हल
−1	x_1^a	$-\frac{3}{2}$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$ →
0	x_2	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
	Δ_j^0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$ ↑	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$

ऋणतम $\Delta_j^0 = -\frac{3}{2}$. अतः आधार में स्तंभ A_3 प्रविष्ट करता है। किस सदिश को हटाया जाए उसे चुनने के लिए हम न्यूनतम $\left\{\frac{9/2}{3/2}, \frac{7/4}{1/4}\right\}$ = न्यूनतम (3, 7) = 3 मालूम करते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि कृत्रिम चर x_1^a के संगत स्तंभ को आधार से हटाना होता है और $\boxed{\frac{3}{2}}$ आधार अवयव होता है। अतः अगली सारणी यह होती है,

	C_j^0	0	0	0	−1	−1	
C_S^0	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_1^a	A_2^a	हल
0	x_3	−1	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3
0	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
	Δ_j^0	0	0	0	1	1	0

अव यहाँ चरण I सामाप्त हो जाता है और चरण II का प्रारंभिक हल प्राप्त हो जाता है और चरण II में हम मूल उद्देश्य फलन लेते हैं

चरण II $\quad Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए।

चरण II की प्रारंभिक सारणी चरण I की (कृत्रिम सदिश वाले स्तंभों से रहित) अंतिम सारणी होती है। अतः

		3	2	1	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	हल
1	x_3	−1	0	1	3
2	x_2	0	1	0	1
	Δ_j	−4	0	0	9

अव ऋणतम Δ_j, −4 है, लेकिन पहले स्तंभ की कोई भी प्रविष्टि निरंतर धनात्मक नहीं होती। और किस सदिश को हटाना है उसका चयन हम नहीं कर सकते। अतः इस स्थिति में भी समस्या का एक अरिवद्ध हल होता है।

उदाहरण 8: (वैकल्पिक इष्टतम वाली स्थिति)

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 \quad \le 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

हल: क्योंकि सभी व्यवरोध '≤' प्रकार के हैं, इसलिए न्यूनतापूरक चर x_4, x_5, x_6 को जोड़कर व्यवरोधों को इस रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है

$x_1 + x_2 + x_4 = 5$

$x_1 + x_5 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 10$

$x_1, ..., x_6 \ge 0$

प्रारंभिक हल यह होगा

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 1, x_6 = 10$ और $Z = 0$

अतः हम समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j	2	4	$\boxed{6}$	0	0	0	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
0	x_4	1	1	0	1	0	0	5
0	x_5	1	0	0	0	1	0	1
0	x_6	1	2	$\boxed{3}$	0	0	1	10→
	Δ_j	–2	–4	–6 ↑	0	0	0	0

ऋणतम Δ_j, = 6. आधार में स्तंभ A_3 प्रविष्ट करता है, तीसरे स्तंभ की केवल एक प्रविष्टि धनात्मक है, इसलिए x_6 के संगत स्तंभ को आधार से हटाना होता है और $\boxed{3}$ आधार अवयव होता है। अगली सारणी यह होती है

	Cj	2	4	6	0	0	0	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
0	x_4	1	1	0	1	0	0	5
0	x_5	1	0	0	0	1	0	1
6	x_6	⅓	⅔	1	0	0	⅓	10/3
	Δ_j	0	0	0	0	0	2	20

क्योंकि सभी $\Delta_j \ge 0$, इसलिए हल इष्टतम होगा। हल यह है:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{10}{3}$. अधिकतम $Z = 20$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि $\Delta_1 = 0$, x_1 एक अनाधारी चर हैं और स्तंभ 1 की सभी प्रविष्टियाँ धनात्मक हैं। आइएं हम देखें कि यदि हम x_1 को एक आधारी चर बना दें तो क्या होता है अर्थात् आइए हम आधार में A_1 को प्रविष्ट करें।

किस सदिश को हटाना है इसके लिए हम

$$\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{1}{1}, \frac{10/3}{1/3}\right\} = \min\{5, 1, 10\} = 1,$$

लेते हैं। इससे यह पता चलता है कि आधारी चर x_5 के संगत स्तंभ को आधार से हटाना होता है और नई सारणी यह होती है

	C_j	2	4	6	0	0	0	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
0	x_4	0	1	0	1	-1	0	4
2	x_1	1	0	0	0	1	0	1
6	x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
	Δ_j	0	0	0	0	0	6	20

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि अनाधारी चर के संगत के कुछ Δ_j भी शून्य होते हैं और इन स्तंभों की कुछ प्रविष्टियाँ y_{ij} धनात्मक होती हैं। इससे यह पता चलता है कि हमें एक वैकल्पिक इष्टतम हल प्राप्त है

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 6 \text{ और } \max Z = 20 \text{ (फिर से)}$$

इसी प्रकार अनाधारी चर x_2 के लिए $\Delta_2 = 0$ और x_2 के संगत स्तंभ की दो प्रविष्टियाँ धनात्मक होती हैं। अतः स्तंभ A_2 को आधार में प्रविष्ट कराके हम x_2 को आधारी बना सकते हैं और हम इसका चयन करते हैं

$$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{2/3}\right\} = \min\left\{4, \frac{9}{2}\right\} = 4$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि हम आधार से सदिश A_4 को हटा सकते हैं और नई सारणी यह होती है

	C_j	2	4	6	0	0	0	
C_S	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
4	x_2	0	1	0	1	-1	0	4
2	x_1	1	0	0	0	1	0	1
6	x_3	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
	Δ_j	0	0	0	0	0	6	20

और $\Delta_j \geq 0$. अब इष्टतम हल यह हो जाता है $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{3}$ और $Z = 20$ (फिर से) और अब $\Delta_5 = 0$ और स्तंभ A की दो प्रविष्टियाँ धनात्मक हैं अतः हम A_5 को प्रविष्ट कर सकते हैं और आधार से x_3 हटा सकते हैं। नई सारणी यह हो जाती है

	C_j	2	4	6	0	0	0	
C_s	आधार में चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
4	x_2	0	1	3	−1	0	3	5
2	x_1	1	0	−3	2	$\boxed{2}$	−3	0
0	x_5	0	0	3	−2	1	3	1
	Δ_j	0	0	0	0	0	6	20

यहाँ भी सभी $\Delta_j \geq 0$ और इष्टतम हल यह होता है

$$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0 \text{ और अधिकतम } Z = 20.$$

इस तरह हम निम्नलिखित चार वैकल्पिक इष्टतम आधारी सुसंगत हल प्राप्त कर सकते हैं

$$\left(0, 0, \frac{10}{3}\right), (1, 0, 6), \left(1, 4, \frac{1}{3}\right)(0, 5, 0)$$

जहाँ उद्देश्य फलन का इष्टतम मान $Z = 20$ समान हैं।

प्रश्न 7: द्विचरण विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

(क) $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ख) $Z = x_1 + 2x_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 5x_2 \geq 6$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

6.4 सारांश

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए इस इकाई को हमं यहीं समाप्त कर रहे हैं।

इस इकाई में हमने एकधा कलन-विधि से किसी भी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करना सीखा है।

भाग 6.2 में हमने एक उदाहरण लेकर एकधा कलन-विधि को विकसित किया है और इसका व्यापकीकृत किया है। सबसे पहले हमने एक आधारी सुसंगत हल लिया जो कि इष्टतम नहीं था, तब एक बार में आधार के एक सदिश में परिवर्तन करके परिमित संख्या में की गई पुनरावृत्तियाँ से हमें इष्टतम आधारी सुसंगत हल प्राप्त हो गया था।

— इसके बाद हमने यह सीखा कि किस प्रकार दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है

— सारणी-संरूप का प्रयोग करके तब हमने यह सीखा कि किस प्रकार एक दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल किया जाता है

(i) इष्टतमत्व निकष प्रस्तुत किया

(ii) आधार में एक नए सदिश को प्रविष्ट करने का नियम

(iii) आधार से किस सदिश को हटाया जाए; यह निर्णय लेने का नियम

(v) यह सीखा कि किस प्रकार एकधा सारणी को अगली सारणी में बदला जा सकता है

— एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल, यदि इसका अस्तित्व हैं, ज्ञात करने के लिए हमने समस्या में कृत्रिम सदिश जोड़े हैं

— कृत्रिम चरों को लागू करने के लिए हमने द्विचरण विधि विकसित की।

चरण I में, प्रत्येक कृत्रिम चर को मूल्य –1 दिया गया जबकि प्रत्येक मूल चर मूल्य 0 दिया गया। मूल उद्देश्य फलन को लेने के स्थान पर हमने फलन

$$Z^0 = -x_1^a - x_r^a - \dots - x_m^a$$

का अधिकतमीकरण किया, जहाँ x_i^a, i वाँ कृत्रिम चर है। जब एकधा विधि को लागू करने पर सभी कृत्रिम चर शून्य की ओर चले जाते हैं, तब चरण I समाप्त हो जाता है।

चरण I की अंतिम सारणी चरण II की प्रारंभिक सारणी होती है और चरण II में हमने हल की जाने वाली समस्या के मूल उद्देश्य फलन पर ही केवल चर्चा की थी।

— अंत में, '≥' प्रकार के व्यवरोधों, मिश्रित व्यवरोधों, मूल समस्या की असंगति, अपरिबद्ध हल वाली स्थिति और वैकल्पिक इष्टतम की एक स्थिति से संबंधित अनेक उदाहरण हल किए हैं।

6.5 उत्तर/संकेत/हल

E1 (क) $x_1 = 0, x_2 = 1$; Max $Z = 3$

(ख) $x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{2}$; Max $Z = \frac{33}{2}$

E2 (क) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$; Max $Z = 9$

(ख) $x_1 = \frac{20}{19}, x_2 = \frac{45}{19}$; Max $Z = \frac{235}{19}$

E3 (क) $x_1 = 2, x_2 = 4$; Max $Z = 36$

(ख) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$; Max $Z = \frac{39}{4}$

E4 (क) $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 0$; Max $Z = 11$

(ख) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 0$;

Max $Z = 6.5$

E5 (क) $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{5}$; Max $Z = \frac{27}{5}$

E6 (ख) $x_1 = \frac{15}{14}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{5}{7}$; Max $Z = \frac{95}{14}$

(क) (i) $C = (4, 1, 0, 0)$

(ii) $Z = 4x_1 + x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$3x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(ख) (i) $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -\frac{1}{2}, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = \frac{3}{4}$,

$\Delta_5 = 2, \Delta_6 = 0$

(ii) सारणी, इष्टतम हल के संगत नहीं है, क्योंकि $\Delta_2 < 0$

(iii) इस विशेष पुनरावृत्ति पर, प्रवेशी सदिश A_2 है और निर्गमी सदिश A_1 है

(iv) आधार अवयव $\boxed{\frac{5}{2}}$ है

(v) अगली सारणी है

	C_j	0	−1	3	0	−2	0	
C_S	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	हल
−1	x_2	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	4
3	x_3	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	5
0	x_6	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	10	1	11
	Δ_j	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	11

E7. (क) $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$; Max $Z = 8$

(ख) $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$; Min $Z = \frac{8}{3}$.

6.6 शब्दावली

अधिकतमीकरण	maximization
आधिक्यपूरक चर	surplus variable
इष्टतम	optimum
इष्टतमत्व निकष	optimality criteria
एकधा कलन-विधि	simplex algorithm
एकधा विधि	simplex method
कृत्रिम चर	artificial variable
चरण	phase
तत्समक आव्यूह	identity matrix
द्विचरण विधि	two-phase method
निर्गमी चर	departing variable
न्यूनतमीकरण	minimization
न्यूनतापूरक चर	slack variable
पुनरावृत्ति	iteration
प्रवेशी चर	entering variable
विहित रूप	canonical form
व्यवरोध	constraints
सुसंगत	feasible

7^{V}

इकाई 7 आद्य और द्वैती

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

इकाई 2 में हमने वास्तविक जीवन से जुड़ी अनेक समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन निदर्श के रूप में प्रस्तुत किया है। आइए हम उनमें से एक समस्या यहाँ पर लें। मान लीजिए यहाँ हम आहार वाली समस्या लें अर्थात् निम्नलिखित समस्या लें:

मां चाहती हैं कि उसके बच्चे अपने नाश्ते में कुछ मात्रा में पोषक पदार्थ अवश्य लें। बच्चे चाहें तो नाश्ते में क्रंचीज खा सकते हैं, या क्रिस्पी खा सकते हैं या दोनों का मिश्रण खा सकते हैं। उन्हें अपने नाश्ते में 1 mg विटामिन ए, .5 mg विटामिन बी और 400 कैलोरी अवश्य लेना है। एक औंस क्रंचीज में 0.10 mg विटामिन ए, 1 mg विटामिन बी, और 110 कैलोरी होता है। 1 औंस क्रिस्पी में 0.25 mg विटामिन ए, .5 mg विटामिन B और 120 कैलोरी होता है। एक औंस क्रंचीज की कीमत 4 सेन्ट है और एक औंस क्रिस्पी की कीमत 5 सेन्ट है।

यदि हम ऊपर दी गई समस्या का एक रैखिक प्रोग्रामन निदर्श बनाएं, जबकि यह मान लें कि एक बच्चा x_1 औंस क्रंचीज और x_2 औंस क्रिस्पी खाता है, तब समस्या यह हो जाती है

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$.01x_1 + .25x_2 \geq 1$$

$$1x_1 + .5x_2 \geq 5$$

$$110x_1 + 120x_2 \geq 400$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0.$$

आइए हम इसी समस्या को एक अलग कोण से लें। मान लीजिए एक दुकानदार पोषक पदार्थ को विटामिन की टिकिया के रूप में और कैलोरी को चाकलेट कैन्डी के रूप में बेचता है। विटामिन ए की एक टिकिया की कीमत W_1 सेन्ट और विटामिन बी की एक टिकिया की कीमत W_2 सेन्ट हैं और एक कैलोरी वाले चाकलेट कैन्डी की कीमत W_3 सेन्ट है।

क्रंचीज के स्थान पर इन विटामिनों, टिकिया और कैन्डी, को खरीदने में मां को $.01W_1 + 1W_2 + 110W_3$ खर्च करना पड़ता है जो कि 4 सेन्ट कम होना चाहिए। इसी प्रकार क्रिस्पी के स्थान पर टिकिया और कैन्डी खरीदने के लिए उसे $.25W_1 + .50W_2 + 120W_3$ खर्च करना पड़ता है जो कि 5 सेन्ट कम है। जबकि इसके विपरीत दुकानदार अपनी बिक्री बढ़ाना चाहता है जो कि खरीदी गई वस्तु की कुल कीमत है और तब इस स्थिति में समस्या का गणितीय रूप यह हो जाता है

$$Z = W_1 + 5W_2 + 400W_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$.01W_1 + W_2 + 110W_3 \leq 4$$

$$.25W_1 + .5W_2 + 120W_3 \leq 5$$

$$W_1, W_2, W_3 \geq 0.$$

इन दो समस्याओं के अलग-अलग गणितीय रूप हैं, जिनमें एक न्यूनतमीकरण समस्या है जबकि दूसरा अधिकतमीकरण समस्या है। इन्हें अलग-अलग रूपों में रखे समान आधारी आँकड़ों के रूप में व्यक्त किया गया है और अगली इकाई में आप देखेंगे कि इन दो समस्याओं के इष्टतम मान (optimal value) समान होते हैं। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि द्वैत (duality) का अर्थ है प्रत्येक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के साथ, जिसे **आद्य** (primal) कहा जाता है, एक अन्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या का, जिसे **द्वैती** (dual) कहा जाता है, संबंध स्थापित करना।

रैखिक प्रोग्रामन में द्वैत संकल्पना को पहले-पहल वॉन न्यूमॉं ने प्रस्तुत किया था। जिसे बाद में चलकर गाले, कुन, और टूकर ने और अधिक स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया। द्वैत का महत्त्व न केवल सैद्धांतिक दृष्टि से है, बल्कि इसका महत्त्व रैखिक प्रोग्रामन के विभिन्न उत्तम अभिकल्पनात्मक कलन विधियाँ विकसित करने में भी है।

इकाई 6 में आपने एकधा विधि (simplex method) से रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करना सीखा है और इकाई 8 में आप यह देखेंगे कि यदि प्रारंभिक एकधा सारणी (initial simplex tableau) में एक $m \times m$ मात्रक आव्यूह हो, तो एकधा विधि से हल करने पर प्राप्त एक समस्या के हल से दूसरी समस्या का एक स्पष्ट हल प्राप्त होता है।

इस इकाई में पहले हम आपको रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती के विहित रूप (canonical form) से परिचित कराएंगे और तब आप द्वैती को गणितीय रूप में प्रस्तुत करना सीखेंगे जबकि विभिन्न रूपों में आद्य (primal) दिए हुए हों। किसी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती को गणितीय रूप में प्रस्तुत करना सीखने से पहले हम यह चाहेंगे कि आप इस समस्या को उसके विहित रूप में बदलना जान जाएं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- किसी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लिख सकेंगे
- यह जान सकेंगे कि किसी दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती भी एक अन्य रैखिक समस्या होती है
- यह देख सकेंगे कि दो समस्याओं के चरों और व्यवरोधों की संख्या में अदला-बदली हो जाती है
- यह देख सकेंगे कि यदि आद्य (द्वैती) एक अधिकतमीकरण समस्या है तो द्वैती (आद्य) एक न्यूनतमीकरण समस्या होती है
- यह जांच सकेंगे कि यदि (द्वैती) आद्य का कोई व्यवरोध एक असमिका व्यवरोध हो, तो संगत द्वैत (आद्य) चर के चिह्न पर कोई प्रतिबन्ध नहीं होता
- यह सिद्ध कर सकेंगे कि द्वैती का द्वैती आद्य होता है।

7.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का विहित रूप लीजिए:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

हम ऊपर दी गई समस्या की द्वैती को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में प्रस्तुत करते हैं

$$D = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \dots, y_m \ge 0$$

मूल समस्या को आद्य (primal) कहा जाता है और दूसरे को द्वैती कहा जाता है। वास्तविकता तो यह है कि ऊपर दी गई दो समस्याओं में से किसी भी एक समस्या को आद्य माना जा सकता है और दूसरे को द्वैती और इन दो समस्याओं से द्वैत प्रोग्रामन समस्याओं का एक युग्म (pair) प्राप्त होता है।

अंगूठा नियम की तरह अतिरिक्त चर (additional variable) की तुलना में अतिरिक्त व्यवरोध (additional constraint) के अभिकलन में अधिक मेहनत पड़ती है। अतः यदि आद्य में व्यवरोधों की संख्या अधिक हो और चरों की संख्या अपेक्षाकृत कम हों, तो इसकी द्वैती के अभिकलन में अधिक कठिनाई नहीं होगी क्योंकि दो समस्याओं के चरों की संख्या और व्यवरोधों की संख्या में अदला-बदली की जा सकती है।

आइए पहले हम यह देखें कि किस प्रकार विहित रूप (canonical form) में दिए गए आद्य की द्वैती को गणितीय रूप में प्रस्तुत किया जाता है अर्थात् '≤' प्रकार के व्यवरोधों वाली अधिकतमीकरण समस्या को गणितीय रूप में प्रस्तुत किया जाता है। हम कुछ उदाहरण लेकर इस विधि को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1: निम्नलिखित आद्य समस्या लीजिए

$$Z = x_1 + 2x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 - 3x_2 \le 3$$
$$4x_1 + x_2 \le -4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

हल

इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती यह है

$$D = 3y_1 - 4y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 + 4y_2 \ge 1$$

$$-3y_1 + y_2 \geq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

प्रश्न 1: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लिखिए

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$3x_1 + 5x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित आद्य की द्वैती लिखिए

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$5x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 3$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2$$
$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 1$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

हलः दिए हुए आद्य की द्वैती यह है

$$D = 3y_1 + 2y + y_3 + 6y_4$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$5y_1 - 2y_2 + y_3 - 3y_4 \geq 2$$
$$6y_1 + y_2 + 5y_3 + 3y_4 \geq 3$$
$$-y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 7y_4 \geq 5$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

प्रश्न 2: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लीजिए

$$Z = 2x_1 + 4x_2 - x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 7$$
$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7.2.1 समिका व्यवरोधों (equality constraints) वाली समस्या की द्वैती (Dual of a Problem with Equality Constraints)

आइए अब हम दी हुई रैखिक प्रोग्रामन समस्या की, जिसमें व्यवरोध समीकरण के रूप में है या समिका व्यवरोध हैं, द्वैती लिखें। इसके लिए हम निम्नलिखित उदाहरण लें:

उदाहरण 3

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

हल: इस आद्य की द्वैती लिखने से पहले आइए हम खंड 1 की इकाई 2 को फिर से पढ़ लें और देखें कि किस प्रकार एक समीकरण को दो असमिकाओं में बदला जाता है। ए विधि यह है कि

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

के रूप के प्रत्येक समीकरण के स्थान पर दो असमिकाओं

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$$
और $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b$$

को अर्थात् दो असमिकाओं

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$$
और $$- a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_n x_n \leq - b$$

लिया जाए।

अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि समीकरणों के रूप के व्यवरोधों वाली किसी समस्या के स्थान पर केवल रैखिक असमिका व्यवरोधों के निकाय वाली समस्या ली जा सकती है।

इस तरह, हम ऊपर दिए गए आद्य को इस रूप में रख सकते हैं

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 7$$
$$- 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq - 7$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 9$$
$$- 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq - 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

अब, क्योंकि यह आद्य उचित रूप में हैं अर्थात् एक अधिकतमीकरण समस्या है जबकि सभी व्यवरोध '≤' प्रकार के हैं, इसलिए द्वैत समस्या यह होगी

$$D - 7y_1 - 7y_2 + 9y_3 - 9y_4$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 3$$
$$y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq 2$$
$$- 3y_1 + 3y_2 + 4y_1 - 4y_2 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

द्वैती का यह रूप ऐसा होता है कि सभी द्वैत चर y_1, y_2, y_3, y_4 ऋणेतर (non-negative) होते हैं। लेकिन, द्वैती के इस रूप में हम यह देखते हैं कि y_1 के गुणांक वही होते हैं जो कि ऋण चिह्नित y_2 के गुणांक हैं और y_3 के गुणांक भी नहीं होते हैं जो कि विपरीत चिह्नित y_4 के गुणांक हैं। आइए अब हम ऊपर की द्वैती में, $y_1 - y_2 = u$ और $y_3 - y_4 = v$ जिससे कि हम चरों u और v के चिह्नों के बारे में सुनिश्चित नहीं होते और इकाई 5 में हमने यह देखा है कि इस प्रकार के चरों को अप्रतिबंधित चर कहा जाता है और इस उदाहरण की द्वैत समस्या इस रूप की हो जाती है

$$D = 7u + 9v$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$\text{(द्वैती)} \quad \begin{cases} 2u + 2v & \geq 3 \\ u + 3v & \geq 2 \\ -3 + 4v & \geq 1 \\ u \text{ और } v \text{ अप्रतिबंधित} \end{cases}$$

प्रश्न 3: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लीखिए:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

उदाहरण 4

$$\mathbf{Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3}$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\text{आद्य} \quad \begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2} & \mathbf{\leq 5} \\ \mathbf{2x_1 + x_2 - 3x_3} & \mathbf{\leq 3} \\ \mathbf{7x_2 + 2x_3} & \mathbf{= 1} \\ \mathbf{x_1, x_2, x_3} & \mathbf{\geq 0} \end{cases}$$

हलः इस आद्य के तीन व्यवरोध हैं जिनमें से दो व्यवरोध '≤' प्रकार के हैं और तीसरा व्यवरोध एक समीकरण है। हम इस आद्य को इस तरह लिख सकते हैं कि अंतिम व्यवरोध को दो असमिका व्यवरोधों के रूप में रखा जा सके, अर्थात् आद्य को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 5}$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 3$$

$$7x_2 + 2x_3 \le 1$$
$$-7x_2 - 2x_3 \le -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

अब यह आद्य उचित विहित रूप में हैं अर्थात, '≤' प्रकार के व्यवरोधों वाली एक अधिकतमीकरण समस्या हैं और सभी चर ऋणेतर हैं। अतः द्वैती को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$D = 5y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$y_1 + 2y_2 \ge 3$$
$$y_1 + y_2 + 7y_3 - 7y_4 \ge 5$$
$$-3y_2 + 2y_3 - 2y_4 \ge 6$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

यह द्वैती का वह रूप है जिसमें सभी चर ऋणेतर हैं। आइए हम $y_3 - y_4$ ... क्योंकि चर u अप्रतिबंधित और द्वैत हैं, अतः इसे रूप में लिखा जा सकता है

$$D = 5y_1 + 3y_2 + u$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$\text{(द्वैती)} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1 + y_2 + 7u \ge 5 \\ -3y_2 + 2u \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0, u \ \ \textbf{अप्रतिबंधित} \end{cases}$$

इस तरह आप यह देख सकते हैं कि क्योंकि इस उदाहरण के आद्य का अंतिम ... एक समीकरण है इसलिए द्वैत के अंतिम चर के चिह्न पर कोई प्रतिबंध नहीं ... आप इस परिणाम को एक व्यापक रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं। यदि आद्य का k वां व्यवरोध एक समिका व्यवरोध हो, तो k वें द्वैत चर के चिह्न पर कोई प्रतिबंध नहीं होता।

प्रश्न 4: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती लिखिए जहां सभी चर ऋणेतर हों।

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \le 7$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 3$$
$$x_1, ..., x_4 \ge 0$$

7.2.2 अप्रतिबंधित चरों वाली समस्या की द्वैती (Dual of a Problem with Unrestricted Variables)

आइए अब हम उस स्थिति को लें जिसमें चरों पर कोई प्रतिबंध न हों अर्थात समस्या के संबंधित चर ऋणात्मक हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं। इस पर चर्चा हम कुछ उदाहरण के रूप में करेंगे।

उदाहरण 5

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

आद्य $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \text{ अप्रतिबंधित हैं} \end{cases}$

हल : $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_2 = x_2' - x_2''$ लीजिए जहां $x_1', x_1'', x_2', x_2'' \ge 0$ और आद्य को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$Z = 3x_1' - 3x_1'' + 4x_2' - 4x_2''$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1' - 4x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' \le 7$$

$$x_1' - x_1'' + 3x_2' - 3x_2'' \le 5$$

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'' \ge 0$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि यह आद्य विहित रूप में है। अतः द्वैती को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$Z = 7y_1 + 5y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4y_1 + y_2 \ge 3$$

$$-4y_1 - y_2 \ge -3$$

$$2y_1 + 3y_2 \ge 4$$

$$-2y_1 - 3y_2 \ge -4$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

या, हम द्वैती को इस रूप में लिख सकते हैं

$$D = 7y_1 + 5y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4y_1 + y_2 = 3$$

$$2y_1 + 3y_2 = 4$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

उदाहरण 6

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\text{आद्य} \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_3 \quad \text{अप्रतिबंधित} \end{cases}$$

हल: $x_3 = x_3' - x_3''$, जहां x_3' और $x_3'' \ge 0$ और हम आद्य को इस रूप में लिख सकते हैं

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3''$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \le 7$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3' - x_3'' \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 4x_3' + 4x_3'' \le 2$$
$$x_1, x_2, x_3', x_3'' \ge 0$$

इसे रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती यह है

$$D = 7y_1 + 3y_2 + 2y_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2$$
$$-5y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 3$$
$$2y_1 + y_2 - 4y_3 \ge 4$$
$$-2y_1 - y_2 + 4y_3 \ge -4$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

जिसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$D = 7y_1 + 3y_2 + 2y_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2$$
$$-5y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 4$$
$$2y_1 + y_2 - 4y_3 = 4$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

इसका व्यापक कथन हम इस प्रकार दे सकते हैं: यदि आद्य समस्या के चर x_p के चिह्न पर कोई प्रतिबंध न हो तो द्वैती का p वाँ व्यवरोध एक असमिका होता है।

प्रश्न 5: निम्नलिखित की द्वैत समस्याएं लिखिए:

(क) $Z = 3x_1 + 6x_2 + 7x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 11$$
$$7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 7$$

$x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 5$

x_1, x_2 अप्रतिबंधित है, $x_3 \ge 0$

(ख) $Z = 6x_1 - 5x_2 - 3x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 3$

$x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 4$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2; x_3$ अप्रतिबंधित

प्रश्न 6: बताइए कि किस प्रकार आप निम्नलिखित समस्या की द्वैती लिखेंगे।

$Z = 11x_1 + 13x_2 + 15x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 12$

$-2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 10$

x_1, x_2, x_3 अप्रतिबंधित

7.2.3 समिका, असमिका व्यवरोधों और अप्रतिबंधित चरों वाली समस्या की द्वैती (Dual of a Problem with Equality, Inequality Constraints and Unrestricted Variables)

नीचे के उदाहरण में हम एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती बनाने के बारे में बताएंगे जिसमें कि चर अप्रतिबंधित हैं और व्यवरोध समीकरण या असमीकरण हो सकते हैं।

उदाहरण 7

$$Z = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\textbf{आद्य} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 \le 13 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{ और } x_4 \text{ और } x_5 \text{ अप्रतिबंधित} \end{cases}$$

हल : $x_4 = x_4' - x_4''$ और $x_5 = x_5' - x_5''$ लिखिए और पहले समिका व्यवरोध को दो असमिका व्यवरोधों के रूप में लिखिए, तब आद्य इस रूप का हो जाता है

$$Z = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 3x_4' - 3x_4'' - x_5' + x_5''$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4' - 6x_4'' + 2x_5' - 2x_5'' \le 11$$

$$-4x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4' + 6x_4'' - 2x_5' + 2x_5'' \le -11$$

$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4' + 5x_4'' + 3x_5' - 3x_5'' \le 13$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', x_5', x_5'' \ge 0$$

अव, क्योंकि आद्य विहित रूप में है, इसलिए द्वैती यह होगी

$$D = 11y_1 - 11y_2 + 13y_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जवकि

$$4y_1 - 4y_2 + 4y_3 \ge 8$$
$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 6$$
$$5y_1 - 5y_2 + 2y_3 \ge 7$$
$$6y_1 - 6y_2 - 5y_3 \ge 3$$
$$-6y_1 + 6y_2 + 5y_3 \ge -3$$
$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge -1$$
$$-2y_1 + 2y_2 - 3y_3 \ge 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

इस द्वैती को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$D = 11u + 13v$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जवकि

$$4u + 4v \ge 8$$
$$2u + 3v \ge 6$$
$$5u - 2v \ge 7$$
$$6u - 5v = 3$$
$$2u + 3v = -1$$
u, अप्रतिवंधित, $v \ge 0$

(जहां हमने $y_1 - y_2 = u$ और $y_3 = v$ लिया है और जहां हमने चौथे और पांचवें असमिका व्यवरोध के तथा छठे और सातवें असमिका व्यवरोध को क्रमशः संगत समिका व्यवरोधों के रूप में संयोजित किया है)

उदाहरण 8: निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन की द्वैत समस्या को इस रूप में लिखिए कि सभी द्वैत चर ऋणेतर हों।

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_1$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि

$$6x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2$$
$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 3$$
x_1, x_2 **अप्रतिवंधित,** $x_3, x_4 \ge 0$

हल : $x_1 = x_1' - x_1''$ और $x_2 = x_2' - x_2''$ लीजिए और पहले असमिका व्यवरोध को '≤' प्रकार के दो असमिकाओं के रूप में लिखिए, तव आद्य को हम इस रूप में लिख सकते हैं :

$$Z = 3x_1' - 3x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' - 4x_3 + x_4$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$6x_1' - 6x_1'' + 4x_2' - 4x_2'' - 3x_3 + 2x_4 \le 2$$
$$-6x_1' + 6x_1'' - 4x_2' + 4x_2'' + 3x_3 - 2x_4 \le -2$$
$$4x_1' - 4x_1'' - 3x_2' + 3x_2'' + 2x_3 + x_4 \ge 3$$
$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', x_3, x_4 \ge 0$$

इसलिए, द्वैती यह होती है

$$D = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$6y_1 - 6y_2 + 4y_3 \ge 3$$
$$-6y_1 + 6y_2 - 4y_3 \ge -3$$
$$4y_1 - 4y_2 - 3y_3 \ge 2$$
$$-4y_1 + 4y_2 - 3y_3 \ge -2$$
$$-3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge -4$$
$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

ध्यान दीजिए कि यहाँ हम पहले और दूसरे व्यवरोधों को तथा तीसरे और चौथे व्यवरोधों को संयोजित कर सकते हैं और द्वैती ऐसी हो कि सभी द्वैत चर ऋणेचर हो और इसका रूप यह हो

$$D = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$6y_1 - 6y_2 + 4y_3 = 3$$
$$4y_1 - 4y_2 - 3y_3 = 2$$
$$-3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge -4$$
$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

प्रश्न 7: निम्नलिखित आद्य की द्वैती लिखिए

$$Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1 + 2x_2 + x_2 \le 7$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$

x_1, अप्रतिबंधित; $x_2, x_3 \ge 0$

प्रश्न 8: निम्नलिखित समस्या की द्वैती को इस रूप में लिखिए जिससे कि सभी द्वैत चर ऋणेतर हो।

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 + x_5 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0; x_5 \text{ अप्रतिबंधित}$$

7.2.4 मानक रूप में समस्या की द्वैती (Dual of a Problem in a Standard Form)

आइए अब हम व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को उसके मानक रूप में ले, जिसे हम इकाई 5 में प्रस्तुत कर चुके हैं।

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

यहां, आप यह देख सकते हैं कि आद्य के सभी व्यवरोध समिका व्यवरोध हैं। इसलिए ऊपर प्राप्त किए गए परिणामों के अनुसार सभी द्वैत चर अप्रतिबंधित हैं और हम द्वैती को इस रूप में लिख सकते हैं

$$D = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$
$$\text{सभी } y_1, y_2, \dots y_m \text{ अप्रतिबंधित}$$

या, आव्यूह संकेतन में, हम इस द्वैती-युग्म को इस रूप में लिख सकते हैं

आद्य	द्वैती
$Z = CX$	$D = B^T Y$
का अधिकतमीकरण कीजिए	का न्यूनतमीकरण कीजिए
जबकि	जबकि
$AX = B$	$A^T Y \geq C^T$
$X \geq 0$	Y अप्रतिबंधित

7.3 द्वैती की द्वैती

भाग 7.2 में हमने यह दिखाया है कि यदि अपने विहित रूप में आद्य यह हो

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_4 \ge 0$$

तो द्वैती यह होती है

$$D = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_n$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \ge 0$$

या हम ऊपर के द्वैती-युग्म को आव्यूह संकेतन में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$Z = CX$	$D = B^T Y$
का अधिकतमीकरण कीजिए	का न्यूनतमीकरण कीजिए
जबकि	जबकि

आद्य $\left\{ \begin{array}{l} AX \le B \quad (I) \\ X \ge 0 \end{array} \right.$ द्वैती $\left\{ \begin{array}{l} A^T Y \ge C^T \quad (II) \\ Y \ge 0 \end{array} \right.$

जहां आप जानते हैं कि A^T, B^T, C^T क्रमशः A,B,C के परिवर्त (transpose) हैं। यहां इस बात की ओर आप ध्यान दे सकते हैं कि ऊपर दी गई द्वैत समस्याओं का युग्म सममित (symmetrical) होता है क्योंकि एक समस्या के उद्देश्य फलन से संबंधित लागत सदिश दूसरी समस्या के व्यवरोध समुच्चय के अपेक्षित सदिश का ठीक परिवर्त होता है। और एक का गुणांक आव्यूह दूसरे के गुणांक आव्यूह का परिवर्त होता है।

अब हम द्वैत समस्याओं (I) और (II) के युग्म के लिए एक अतिरिक्त परिणाम प्राप्त करेंगे।

प्रमेय : द्वैती की द्वैती आद्य होती है।

उपपत्ति : निम्नलिखित आद्य लीजिए

CX का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$AX \le B$$
$$X \ge 0$$

तब द्वैती यह होती है

$$D = B^T_Y$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$A^T Y \ge C^T$$
$$Y \ge 0$$

आइए हम इस द्वैती को विहित रूप में लिखें, अर्थात् एक ऐसे रूप में लिखें जिससे कि उद्देश्य फलन एक अधिकतमीकरण फलन हो और व्यवरोध '≤' प्रकार के हों। अतः द्वैती इस रूप की हो जाती है

$$-B^T Y$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$-A^T Y \le -C^T$$
$$Y \ge 0$$

अब इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती यह होती है

$$(-C^T)^T W$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$(-A^T)^T W \ge (-B^T)^T$$
$$W \ge 0.$$

अब, क्योंकि एक सदिश के परिवर्त का परिवर्त स्वयं एक सदिश होता है, इसलिए द्वैती की द्वैती को इस रूप में रखा जा सकता है

$$-CW$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$-AW \ge -B$$
$$W \ge 0.$$

जिसे इस रूप में हम लिख सकते हैं

CW का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$AW \le C$$
$$W \ge 0.$$

जो कि सही माने में आद्य समस्या है।

ऊपर दिए गए प्रमेय में आप इस बात की ओर ध्यान दे सकते हैं कि दो समस्याओं (I) और (II) में से किसी एक समस्या को आद्य माना जा सकता है और दूसरे को उसकी द्वैती। इस तरह दो समस्याओं (I) और (II) से द्वैत समस्याओं का एक युग्म प्राप्त होता है।

उदाहरण 9: सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती की द्वैती आद्य होती हैं।

$$Z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

हल: पहले हम दूसरे व्यवरोध को −1 से गुणा करके और तीसरे समिका व्यवरोध को दो असमिका व्यवरोधों के रूप में रखकर आद्य को विहित रूप में प्रस्तुत करेंगे। इस तरह

$$Z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1 - 2x_2 - 3x_2 \leq 7$$

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती यह है

$$D = 7y_1 - 5y_2 + y_3 - y_4$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 6$$

$$-2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -2$$

$$-3y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

आइए अब हम इस द्वैती को एक विहित रूप में लिखें अर्थात् '≤' प्रकार के व्यवरोधों वाली अधिकतमीकरण समस्या के रूप में लिखें। अतः

$$-D = -7y_1 + 5y_2 - y_3 + y_4$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$-4y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \leq -6$$

$$2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq 2$$

$$3y_1 - 4y_2 - y_3 + y_4 \leq -1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती यह है

$$-P = -6w_1 + 2w_2 - w_3$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$-4w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq -7$$
$$2w_1 + w_2 - 4w_3 \geq 5$$
$$-w_1 - w_2 - w_3 \geq -1$$
$$w_1 + w_2 + w_3 \geq 1$$
$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

हम इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या को इस रूप में लिख सकते हैं

$$P = 6w_1 - 2w_2 + w_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4w_1 - 2w_2 - 3w_3 \leq 7$$
$$2w_1 + w_2 - 4w_3 \geq 5$$
$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$
$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

जो कि सही माने में दी हुई आद्य समस्या है।

प्रश्न 9: सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित प्रोग्रामन समस्या की द्वैती की द्वैती आद्य होती है।

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$5x_1 + 6x_2 = -7$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 3$$
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

इस भाग में हमने आपको जो कुछ बताया हैं यदि आपने उसे अच्छी तरह से समझ लिया है तो आपको निम्नलिखित बातों को याद रखने में कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए:

1. प्रत्येक आद्य (द्वैत) व्यवरोध के लिए एक द्वैत (आद्य) चर होता है।
2. द्वैत समस्या में गुणांक आव्यूह वही होता है जो कि आद्य में होता है अंतर केवल यह होता है कि एक का स्तंभ दूसरी की पंक्ति होती है और दूसरे का स्तंभ पहले की पंक्ति होती है।
3. द्वैत चरों की संख्या आद्य व्यवरोधों की संख्या के बराबर होती है और द्वैत व्यवरोधों की संख्या आद्य चरों की संख्या के बराबर होती हैं।

7.4 सारांश

द्वैत रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के युग्म के बीच के व्यापक संबंध का एक संक्षिप्त विवरण यह है:

1. यदि आद्य एक अधिकतमीकरण समस्या हो जिसके सभी व्यवरोध '≤' प्रकार के हों और सभी चर ऋणेतर हों, तो द्वैती एक न्यूनतमीकरण समस्या होती है जिसके सभी व्यवरोध '≤' प्रकार के होते हैं और सभी द्वैत चर ऋणेतर होते हैं।

2. यदि आद्य (द्वैती) का kवां व्यवरोध एक समीकरण हो, तो k वें द्वैत (आद्य) चर के चिह्न पर कोई प्रतिबंध नहीं होता।

3. द्वैती की द्वैती आद्य होती है। अतः दो समस्याओं में से किसी भी एक समस्या को आद्य माना जा सकता है और तब दूसरे को द्वैती और तब इन दो समस्याओं को एक साथ लेने पर एक द्वैत युग्म प्राप्त होता है।

7.5 उत्तर /संकेत/हल

प्रश्न 1. $D = 5y_1 + 4y_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$3y_1 + y_2 \geq 5$$
$$5y_1 + 3y_2 \geq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

प्रश्न 2. $D = 7y_1 + 5y_2 + 2y_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 - 2y_2 + y_1 \geq 2$$
$$-3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

प्रश्न 3. $D = 5y_1 - 5y_2 + 11y_3 - 11y_4$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$6y_1 - 6y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 4$$
$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq 2$$
$$-y_1 + y_2 + 4y_3 - 4y_4 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

प्रश्न 4. $D = 2y_1 - 2y_2 + 7y_3 + 3y_4$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 3y_4 \geq 3$$

$$y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -2$$
$$4y_1 - 4y_2 + y_3 + 2y_4 \geq 4$$
$$3y_1 - 3y_2 - 2y_3 + 2y_4 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

प्रश्न 5. (क) $D = 11y_1 + 7y_2 + 5y_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 + 7y_2 + y_3 = 3$$
$$3y_1 + 2y_2 + 5y_3 = 6$$
$$5y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 7$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

(ख) $D = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 6$$
$$-2y_1 + 5y_2 + y_3 = -5$$
$$2y_1 + 4y_2 - 4y_3 = -3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

प्रश्न 6. $D = 12y_1 + 10y_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4y_1 - 2y_2 = 11$$
$$2y_1 + 5y_2 = 13$$
$$6y_1 + 7y_2 = 15$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

प्रश्न 7. $D = 7y_1 + 8y_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबक्रि

$$4y_1 + 2y_2 = 2$$
$$2y_1 - y_2 \geq -1$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 2$$
$$y_1 \geq 0, y_2$$

$y_1 \geq 0$, y_2 अप्रतिबंधित

प्रश्न 8. $D = 2y_1 - 2y_2 + 6y_3 - 6y_4$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$3y_1 - 3y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 6$$
$$7y_1 - 7y_2 + y_3 - y_4 \geq 4$$

$$8y_1 - 8y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq 1$$
$$5y_1 - 5y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 7$$
$$y_1 - y_2 + 9y_3 - 9y_4 = 5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

7.6 शब्दावली

असमिका	inequality
आद्य	primal
द्वैत	duality
द्वैती	dual
परिवर्त	transpose

इकाई 8 द्वैत प्रमेय

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में आपने देखा कि प्रत्येक रैखिक प्रोग्रामन समस्या से जुड़ी एक अन्य समस्या भी होती हैं। यदि एक समस्या को 'आद्य' (primal) कहा जाता हो, तो दूसरी समस्या को द्वैत कहा जाता है। इस तरह, दो समस्याओं से द्वैत रैखिक प्रोग्रामों का एक युग्म प्राप्त होता है। इस इकाई में हम आपसे दुर्वल द्वैत प्रमेय और प्रवल द्वैत प्रमेय की सहायता से द्वैत रैखिक प्रोग्रामन समस्या-युग्म के वीच के द्वैत संवंध से परिचित कराएंगे। इकाई 7 में आपने यह देखा है कि द्वैत परिणामों का महत्व न केवल उनके सैद्धांतिक दृष्टिकोण से है, वल्कि रैखिक प्रोग्रामन की अभिकलनात्मक कलन-विधि में भी हैं। दुर्वल और प्रवल द्वैत प्रमेयों की सहायता से हम यह दिखाएंगे कि किसी भी द्वैत युग्म की दो समस्याओं के गुणधर्मों में निकट का संवंध होता है। इस तरह यदि एक समस्या का इष्टतम हल (optimal solution) ज्ञात हो, तो दूसरी समस्या के इष्टतम हल के वारे में भी पूरी जानकारी प्राप्त हो जाती है। आप यह भी देखेंगे कि कुछ स्थितियों में द्वैत संवंध से रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल में काफी सुविधा हो जाती हैं। इस पूरे भाग में हम "अधिकतमीकरण" समस्या को 'आद्य' और संगत "न्यूनतमीकरण" समस्या को द्वैत मानेंगे।

इस इकाई को पढ़ लेने के वाद आप

- यह देख सकेंगे कि एक समस्या के इष्टतम हल से दूसरी समस्या का इष्टतम हल प्राप्त हो जाता है।
- यह जान सकेंगे कि आद्य और द्वैत समस्याओं के इष्टतम मान समान होते हैं।
- द्वैत चरों का निर्वचन कर सकेंगे।
- द्वैत के लाभ वता सकेंगे।

8.2 दुर्वल द्वैत

इकाई 7 में हमने आद्य को उसके विहित रूप (canonical form) में लिया था।

आद्य

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जवकि

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

इसकी द्वैतीः

$$D = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$(\text{द्वैत})\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

आव्यूह संकेतन में ये दो रूप इस प्रकार के होते हैं:

आद्य

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\text{आद्य}\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

मान लीजिए $K = \{X : AX \leq B, X \geq 0\}$ आद्य के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय है।

द्वैती

$$D = B^T Y$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$A^T Y \geq C^T$$

$$Y \geq 0$$

मान लीजिए $E = \{Y : A^T Y \geq C^T, Y \geq 0\}$, द्वैती के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय है।

प्रमेय 1 (दुर्बल द्वैत प्रमेय): यदि आद्य और द्वैत समस्याएँ दोनों ही सुसंगत हो, जहाँ K **और** E **उनके सुसंगत प्रदेश हैं, तो**

प्रत्येक $X \in K$ और $Y \in E$ के लिए $Z \leq D$.

उपपत्तिः मान लीजिए $X_0 \in K$ और $Y_0 \in E$. तब

$$AX_0 \leq B \tag{1}$$

$$X_0 \geq 0 \tag{2}$$

$$\text{और } A^T Y_0 \geq C^T ;k\ \ Y_0{}^T A \geq C \tag{3}$$

$$Y_0 \geq 0 \quad \text{और} \quad Y_0^T \geq 0 \tag{4}$$

(1) और (4) से हमें यह प्राप्त होता है

$$Y_0^T AX_0 \leq Y_0^T B \tag{5}$$

और, (2) और (3) से हमें यह प्राप्त होता है

$$Y_0^T AX_0 \geq CX_0 \tag{6}$$

(5) और (6) से हमें यह प्राप्त होता हैं

$$CX_0 \leq Y_0^T AX_0 \leq Y_0^T B\ (= B^T Y_0)$$

या $Z \leq D$.

अब हम एक उदाहरण लेकर इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1: निम्नलिखित द्वैत युग्म लीजिए

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

आद्य

जबकि

$$\mathbf{5x_1 + x_2 \leq 7}$$

$$\mathbf{3x_1 + 2x_1 \leq 11}$$

$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$$

$$\mathbf{D = 7y_1 + 11y_2}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए

द्वैती

जबकि

$$\mathbf{5y_1 + 3x_2 \geq 2}$$

$$\mathbf{y_1 + y_2 \geq 3}$$

$$\mathbf{y_1, y_2 \geq 0.}$$

हलः आप यहाँ देख सकते हैं कि हलों $x_1 = 1, x_2 = 2$ और $y_1 = 0, y_2 = 3$ से, जो कि ऊपर दी गई आद्य और द्वैत समस्याओं के युग्म के लिए सुसंगत है, $Z = 8$ और $D = 33$ प्राप्त होते हैं, जिससे यह पता चलता है कि $Z < D$. इससे दुर्बल द्वैत प्रमेय का कथन, $Z \leq D$, सत्यापित हो जाता है। आप यहाँ यह भी देख सकते हैं कि उद्देश्य फलन का इष्टतम मान 8 और 33 के बीच है।

आइए हम आद्य और द्वैती के सुसंगत हलों का एक अन्य युग्म $x_1 = 0,\ x_2 = 4;$ $y_1 = 1, y_2 = 1$ लें जिनसे $Z = 12$ और $D = 18$ प्राप्त होते हैं। इससे भी यह पता चलता है कि $Z < D$. लेकिन इष्टतम मान 12 और 18 के बीच हैं अर्थात् वह परिसर (range), जिसमें इष्टतम हल स्थित होता है, सुसंगत हलों के इस युग्म के संगत कम होता जाता है।

प्रश्न 1

रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का निम्नलिखित द्वैत युग्म लीजिए

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

आद्य

जबकि

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$D = 5y_1 + 2y_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए

द्वैती

जबकि

$$y_1 + 2y_2 \ge 5$$
$$2y_1 - y_2 \ge 12$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

(i) सत्यापित कीजिए कि

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{3} \text{ और } y_1 = 7, y_2 = 2$$

दो समस्याओं के क्रमशः सुसंगत हल हैं।

(ii) दुर्वल द्वैत प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

प्रमेय 2: मान लीजिए आद्य और द्वैती के सुसंगत हल क्रमशः X_0 और Y_0 है, जिससे कि

$$CX_0 = B^T Y_0 \tag{6}$$

तब X_0, आद्य का इष्टतम हल होता है और Y_0 द्वैती का इष्टतम हल होता है।

उपपत्तिः मान लीजिए X आद्य समस्या का एक सुसंगत हल है, तब दुर्वल द्वैत प्रमेय 1 के अनुसार

$$CX \le B^T Y, \tag{7}$$

जहाँ Y द्वैती का एक स्वेच्छ (arbitrary) सुसंगत हल है।

अब, संबंध (7) विशेष रूप से $Y_0 \in D$ के लिए सत्य है

अर्थात्

$$CX \le B^T Y_0$$
$$= CX_0 \qquad \text{((6) का प्रयोग करने पर)}$$
$$\therefore CX \le CX_0 \qquad \forall \qquad X \in K.$$

$\Rightarrow X_0$ आद्य का इष्टतम हल हैं। और, क्योंकि (7), विशेष रूप से किसी भी $X_0 \in K$ के लिए सत्य होता है, इसलिए

$$CX_0 \leq B^T Y \;\; \forall \;\; Y \in E$$

या $$B^T Y_0 \leq B^T Y \;\; \forall \;\; Y \in E$$ ((6) का प्रयोग करने पर)

$\Rightarrow Y_0$ द्वैती का इष्टतम है।

8.3 प्रबल द्वैत

द्वैत प्रमेय 1 और 2 को सिद्ध करने के लिए हमने आद्य समस्या (P) को उसके सुसंगत निहित रूप में लिया था, अर्थात्

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि

$$AX \leq B$$
$$X \geq 0$$

प्रबल द्वैत प्रमेय को सिद्ध करने से पहले हम आद्य को इकाई 5 में बताए गए उसके मानक रूप में प्रस्तुत करना चाहेंगे। आप तो जानते ही हैं कि आद्य को मानक रूप में रखने के लिए हम आपसे क्यों कह रहे हैं, क्योंकि यदि आप एकधा विधि (simplex method) से आद्य समस्या को हल करना चाहते हैं, तो इकाई 6 से आप यह जानते हैं कि एकधा विधि लागू करने से पहले व्यवरोध-असमिकाओं को समीकरणों में रूपांतरित करना आवश्यक होता है।

अतः मान लीजिए कि स्तंभ सदिश $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ के n ऋणेतर अवयव न्यूनतापूरक चर (slack variable) हैं जो (P) के व्यवरोधों को समीकरणों में रूपांतरित कर देते हैं

$$AX + IW = B$$
$$X, W \geq 0$$

जहाँ I कोटि $m \times m$ वाला तत्समक आव्यूह (identity matrix) है। अब आप आद्य को इस रूप में लिख सकते हैं

$$Z = (C, 0) \begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix}$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

(आद्य) जबकि

$$(A, I) \begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} = B$$
$$\begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} \geq 0.$$

यहाँ $O = (0, 0 \dots, 0)$ एक m -घटक पंक्ति सदिश है और I, एक $m \times m$ तत्समक आव्यूह (identity matrix) है अर्थात् $I = (e_1, e_2, \dots, e_m)$. आप यहाँ देख सकते हैं कि

द्वैत समस्या समान रहती है। अब हम यहाँ उपपत्ति दिए बिना प्रबल द्वैत प्रमेय (strong duality theorem) का कथन दे रहे हैं।

प्रमेय 3 (प्रबल द्वैत प्रमेय) : यदि (आद्य या द्वैत) समस्याओं में से किसी भी एक समस्या का एक परिमित इष्टतम हल होता हो, तो दूसरी समस्या का भी एक परिमित इष्टतम हल होता है और इनके संगत उद्देश्य फलनों के इष्टतम मान बराबर होते हैं।

इस प्रमेय का उद्देश्य यह दिखाना है कि आद्य और द्वैत समस्याओं के इष्टतम मान बराबर होते हैं। दूसरे शब्दों में यदि आद्य समस्या का एक परिमित इष्टतम हल हो, तो द्वैत समस्या का भी एक परिमित इष्टतम हल होता है और दो उद्देश्य फलनों के इष्टतम मान बराबर होते हैं। इसी प्रकार, आप यह सिद्ध कर सकते हैं कि यदि द्वैत समस्या का एक परिमित इष्टतम हल होता हो, तो आद्य समस्या का भी एक परिमित इष्टतम हल होता है और दो उद्देश्य फलनों के इष्टतम मान बराबर होते हैं।

वास्तव में रैखिक प्रोग्रामन में यह परिणाम सदा ही सत्य होता है क्योंकि दो समस्याओं आद्य समस्या या द्वैत समस्या में से किसी भी एक समस्या को आद्य माना जा सकता है और दूसरे को द्वैत।

अब हम नियमित एकधा विधि को निम्नलिखित आद्य और द्वैत समस्याओं पर लागू करके प्रबल द्वैत प्रमेय को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 2

$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

(आद्य)

जबकि

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \quad \geq 0.$$

$$D = 2y_1 + 2y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए

(द्वैती)

जबकि

$$2y_1 + 4y_2 \geq 1$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$
$$2y_1 + y_2 \geq 1$$
$$y_1, y_2 \quad \geq 0$$

हलः आइए पहले हम एकधा विधि लागू करके आद्य को हल करने की कोशिश करें। आधिक्यपूरक चरों (slack variables) को जोड़ने पर आद्य के व्यवरोध ये हो जाते हैं

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$
$$4x_1 + 2y_2 + x_3 + x_5 = 2$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

x_4 और x_5 आधिक्यपूरक चर (surplus variable) हैं। इस आद्य समस्या का प्रारंभिक हल यह है

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 2, x_5 = 2; Z = 0$$

अतः हम आद्य समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j	1	1	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	हल
0	x_4	2	1	2	1	0	2
0	x_5	4	$\boxed{2}$	1	0	1	2 →
	$Z_j - C_j$	−1	−1 ↑	−1	0	0	0

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि $Z_j - C_j$ के तीनों ऋणेतर मान बराबर हैं अर्थात् हमें तीन विकल्प प्राप्त होते हैं। अतः तीन सदिशों A_1, A_2 या A_3 में से कोई भी सदिश आधार में प्रविष्ट कर सकता है। और किस सदिश को हटाना है, इसे मालूम करने के लिए हम $\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2}$ अभिकलित करते हैं जिससे यह पता चलता है कि आधार से सदिश A_5 को हटाना है और $\boxed{2}$, आधार अवयव है। अगली सारणी नीचे दी गई है

	C_j	1	1	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	हल
0	x_4	−0	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
1	x_2	2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1 →
	$Z_j - C_j$	1	0	$-\frac{1}{2}$ ↑	0	$\frac{1}{2}$	1

ऋणतम $Z_j - C_j$, $-\frac{1}{2}$ है। अतः आधार में स्तंभ A_3 प्रविष्ट करता है और

$\min\left\{\frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\frac{1}{2}}\right\} = \min\left\{\frac{2}{3}, 2\right\} = \frac{2}{3}$, इसलिए आधार से सदिश A_4 को हटाना होता है और $\boxed{\frac{3}{2}}$ आधार अवयव होता है।

अगली सारणी यह है।

	C_j	1	1	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	हल
0	x_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	x_2	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$Z_j - C_j$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

क्योंकि सभी $Z_j - C_j \geq 0$, इसलिए हमें इष्टतम हल प्राप्त होता है, जो यह है

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{2}{3} \text{ और अधिकतम } Z = \frac{4}{3}.$$

आइए अब हम एकधा विधि (अर्थात् द्विचरण विधि (two phase method) जिसे आप इकाई 5 में पढ़ चुके हैं) से द्वैत समस्या को हल करें।

आधिक्यपूरक चरों y_3, y_4 और y_5 को जोड़कर द्वैत के व्यवरोधों को समीकरणों को रूपांतरित कीजिए और व्यवरोध निम्न रूप के होते हैं

$$\begin{aligned}
2y_1 + 4y_2 - y_3 &= 1 \\
y_1 + 2y_2 - y_4 &= 1 \\
2y_1 + y_2 - y_5 &= 1 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

स्पष्ट है कि इस व्यवरोध निकाय के गुणांक आव्यूह में प्रारंभिक तत्समक आव्यूह (initial identity matrix) नहीं है। अतः इसमें और चरण I में कृत्रिम चर y_1^a, y_2^a और y_3^a जोड़ते हैं और हल करते हैं

$$D^0 = -y_1^a - y_2^a - y_3^a$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$\begin{aligned}
2y_1 + 4y_2 - y_3 + y_1^a &= 1 \\
y_1 + 2y_2 - y_4 + y_2^a &= 1 \\
2y_1 + y_2 - y_5 + y_3^a &= 1 \\
y_1, \ldots, y_5, y_1^a, \ldots, y_3^a &\geq 0
\end{aligned}$$

अनाधारी चरों को शून्य के बराबर करके प्रारंभिक हल प्राप्त किया जाता है,

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$$

अतः $y_1^a = 1, y_2^a = 1, y_3^a = 1,$ और $y^0 = -3$

हम समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j^0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	
C_s^0	आधार के चर	A_1	A_2	A3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	A^a	हल
−1	y_1^a	2	$\boxed{4}$	−1	0	0	1	0	0	1
−1	y_2^a	1	1	0	−1	0	0	1	0	1
−1	y_3^a	1	2	0	0	−1	0	0	1	1
	$Z_j^0 - C_j^0$	−5	−7 ↑	1	1	1	0	0	0	−3

ऋणतम $Z_j^0 - C_j^0, -7$ हैं, इसलिए आधार में स्तंभ A_2 प्रविष्ट करता है और हम निम्नतम $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{4}$ लेते है। अतः आधार से कृत्रिम चर y_1^a के स्तंभ को हटाना होता है और $\boxed{4}$ आधार अवयव है। नई सारणी यह है

	C_j^0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	
C_s^0	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	A_3^a	हल
0	y_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
−1	y_2^a	0	0	$\frac{1}{2}$	−1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
−1	y_3^a	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{1}{4}$	0	−1	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$
	$Z_j^0 - C_j^0$	$-\frac{3}{2}$ ↑	0	$-\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{7}{4}$	0	0	$-\frac{5}{4}$

ऋणतम $Z_j^0 - C_j^0, -\frac{3}{2}$ हैं। अतः आधार में स्तंभ A_1 प्रविष्ट करता है और हम निम्नतम $\left\{\frac{1/4}{1/2}, \frac{3/4}{3/2}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, लेते हैं अर्थात् हमें कुछ विकल्प प्राप्त होते है। इस स्थिति में y_3^a के संगत कृत्रिम सदिश को आधार से हटाना होता है और आधार अवयव $\frac{3}{2}$ हैं। हम अगली सारणी पर आ जाते हैं

C_s^0	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1^a	A_2^a	A_3^a	हल
C_j^0		0	0	0	0	0	−1	−1	−1	
0	y_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
−1	y_2^a	0	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	−1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2} \rightarrow$
0	y_1	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
	$Z_j^0 - C_j^0$	0	0	$\frac{-1}{2}$ ↑	1	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$

ऋणतम $Z_j^0 - C_j^0$, $-\frac{1}{2}$ हैं अतः आधार में स्तंभ सदिश A_3 प्रविष्ट करते हैं और न्यूनतम का चयन करते हैं

अर्थात् $\left\{\frac{1/2}{1/2}, \frac{1/2}{1/6}\right\} = \min\{1, 3\} = 1.$

अतः कृत्रिम सदिश y_2^a के संगत स्तंभ को हटाना होता है और $\boxed{\frac{1}{2}}$ आधार अवयव हैं।

अगली सारणी यह है

C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	हल
C_j		−2	−2	0	0	0	
2	y_2	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	y_3	0	0	1	−2	0	1
−2	y_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$Z_j^0 - C_j^0$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$

क्योंकि सभी $Z_j - C_j \geq 0$, इसलिए हमें इष्टतम हल प्राप्त हो जाता है और [illegible] का इष्टतम हल यह होता है

$$y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = 0, y_4 = 0 \text{ और } D = -\frac{4}{3}$$

$$\text{अर्थात् न्यूनतम } D = \frac{4}{3}.$$

अतः आद्य और द्वैत समस्याओं के इष्टतम हल के लिए हमें यह प्राप्त होता है

$$\text{अधिकतम } Z = \text{न्यूनतम } D = \frac{4}{3}$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यदि आद्य समस्या की प्रारंभिक एकधा सारणी में एक मात्रक आव्यूह (न्यूनतापूरक सदिशों के स्तंभों के संगत प्रारंभिक आधार आव्यूह) होता हो, तो एकधा विधि लागू करने पर आद्य समस्या के हल से द्वैती का एक स्पष्ट हल प्राप्त होता है।

वास्तव में, न्यूनतांपूरक चर x_4 और x_5 के संगत आद्य समस्या की अंतिम एकधा सारणी में $Z_j - C_j$ के मान अर्थात $Z_4 - C_4 = \frac{1}{3}$ और $Z_5 - C_5 = \frac{1}{3}$, द्वैत चर y_1 और y_2 के मान होते हैं अर्थात्

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_s^T S^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

इसी प्रकार द्वैत समस्या की अंतिम सारणी में $Z_4 - C_4 = \frac{2}{3}$ और $Z_5 - C_5 = \frac{2}{3}$ के मान वास्तव में आद्य चरों x_2 और x_3 के मान हैं या

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2, 0, -2) \begin{pmatrix} 0-2/3 & 1/3 \\ 1 \;-2 & 0 \\ 0 \;\; 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = (0, 2/3, 2/3)$$

अतः आद्य समस्या और द्वैत समस्या में से किसी भी एक समस्या को हल कर लेना ही पर्याप्त होता है। अब हम निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को लेकर द्वैत-नियम को प्रदर्शित कर सकते हैं।

उदाहरण 3:

$$D = 3y_1 + 2y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 + 3y_2 \ge 2$$
$$3y_1 + y_2 \ge 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

हल: इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या का द्वैती यह है

$$Z = 2x_1 + x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$3x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

आधिक्यपूरक चरों को जोड़ने पर व्यवरोध ये हो जाते हैं

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

प्रारंभिक हल यह है $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 2$ और $Z = 0$

हम इस समस्या को निम्नलिखित सारणी रूप में प्रस्तुत करते हैं

	C_j	2	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	हल
0	x_3	2	2	1	0	3
0	x_4	$\boxed{3}$	1	0	1	2 →
	$Z_j - C_j$	-2 ↑	-1	0	0	0

ऋणतम $Z_j - C_j, -2$ हैं। अतः आधार में स्तंभ A_1 प्रविष्ट करता है और हमें

$\min\left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ का चयन करना होता है। इसलिए आधार से स्तंभ A_4 को हटाना होता है और आधार अवयव $\boxed{3}$ है। अगली सारणी यह है

	C_j	2	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	हल
0	x_3	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$ →
2	x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$Z_j - C_j$	0	$-\frac{1}{3}$ ↑	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

ऋणतम $Z_j - C_j, -\frac{1}{3}$ है। अतः आधार में सदिश A_2 प्रविष्ट करता है और हमें न्यूनतम $\left\{\frac{5/3}{4/3}, \frac{2/3}{1/3}\right\} = \min\left\{\frac{5}{2}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{5}{4}$ का चयन करना होता है जिससे यह पता चलता है कि आधार से सदिश A_3 को हटाना होता है और आधार अवयव $\boxed{\frac{4}{3}}$ है। अगली सारणी यह है

	C_j	2	1	0	0	
C_s	आधार के चर	A_1	A_2	A_3	A_4	हल
1	x_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
2	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	$Z_j - C_j$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$

106

$= m$. इकाई 6 की तरह यहाँ भी यह मान लीजिए कि C_s, उद्देश्य फलन के आधारी चरों का गुणांक हैं।

समीकरण-निकाय (10) को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$Y^T = C_s S^{-1} \tag{11}$$

ओर, आपेक्षिक लागत कारकों (relative cost factors) का सदिश यह होता है

$$\bar{C} = C - A^T Y = C - Y^T A = C - (C_s S^{-1})^T A$$

या $\quad \bar{C}_j = C_j - C_s S^{-1} A_j$ (जहाँ A_j, A का j वाँ स्तंभ है) $\quad j = 1, \ldots, n$

$$= C_j - C_s Y_j \quad (\text{क्योंकि } Y_j = S^{-1} A_j)$$
$$= C_j - Z_j \quad (\text{क्योंकि } Z_j = C_s Y_j)$$

(जैसा कि इकाई 6 में परिभाषित है।

समीकरणों (9) और (11) से हम आधारी और अनाधारी चरों के पदों में उद्देश्य फलन का मान हमें इस रूप में प्राप्त होता है

$$Z = C_s S^{-1} B + \bar{C} X \tag{12}$$

अतः प्रतिरूपी (typical) अनाधारी चर x_j के एक फलन के रूप में Z का परिवर्तन-दर यह है

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = \bar{C}_j = C_j - Z_j \quad (x_j \text{ का आपेक्षिक लागत कारक})$$

स्मरण रहे कि $\frac{\partial Z}{\partial x_j}$, x_j के सापेक्ष Z के आंशिक अवकलन (partial derivative) को प्रकट करते हैं।

अब आप द्वैत चरों के निर्वचन या एकधा गुणक या 'कल्पित लागत' या 'अस्पष्ट लागत' और सु-अवसर लागत पर विचार कर सकते हैं। आइए अब हम अधिकतमीकरण आद्य समस्या का, जिस पर हम इस भाग में चर्चा कर रहे थे, को j वाँ द्वैत व्यवरोध लें। व्यवरोध यह है

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m \geq C_j$$

जहाँ a_{ij}, i वें दुर्लभ साधन (scarce resource) b_i से प्राप्त j वें आद्य चर x_j की प्रति इकाई आवश्यकता है और C_j, उद्देश्य फलन में x_j का गुणांक है। संबंध (12) के अनुसार $Z_j - C_j$ से उद्देश्य फलन के मान में x_j का गुणांक प्राप्त होता है (जिसे आधारी और अनाधारी चरों के पदों में व्यक्त किया गया है)। इकाई 6 में प्राप्त किए गए इष्टतमत्व निकष (optimality criteria) के अनुसार x_j एक संभावी चर होता है जबकि $Z_j - C_j < 0$ और क्योंकि आद्य एक अधिकतमीकरण समस्या है इसलिए C_j को लाभ माना जा सकता है जबकि $-Z_j$ को लागत माना जा सकता है। इस तरह, Z_j का मान जितना कम होगा, x_j उतना ही अधिक आकर्षक होगा। आर्थिक दृष्टि से Z_j को प्रति इकाई x_j पर आरोपित कीमत (imputed price) माना जाता है। इस तरह द्वैत चर Y_i, प्रति इकाई आवश्यकता a_{ij} की तुल्यता को परिभाषित करता है।

इस तरह अनाधारी चर x_j इष्टतम हल को तब तक एक संभावी प्रत्याशी होता है जब तक कि प्रति इकाई C_j इसका लाभ प्रति इकाई Z_j इसके आरोपित मूल्य से अधिक होता हो अर्थात्

$$C_j > Z_j \text{ या } Z_j - C_j < 0.$$

जब $Z_j = C_j$ तब संगत चर से उद्देश्य फलन के वर्तमान मान में परिवर्तन नहीं हो सकता। अंत में, जब $Z_j - C_j > 0$ तब चर x_j असंभावी हो जाता है और तब इसे शून्य स्तर पर अनाधारी बना रहना चाहिए। इस तरह, आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि आधारी चर Z_j को C_j के बराबर होना चाहिए इससे यह पता चलता है कि संगत चर का अधिकतम उपयोग किया गया है और इस तरह इससे हल में और अधिक सुधार नहीं लाया जा सकता।

आय के इष्टतम हल के संगत द्वैत चरों या एकधा गुणकों का निर्वचन

एक व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को उसके मानक रूप में, जिसे हम इकाई 5 में बता चुके हैं, लीजिए

$$Z = CX$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$AX = B$$
$$X \geq 0 \tag{13}$$

मान लीजए $(X_s, 0)$, (13) का इष्टतम हल है जिसका आधार आव्यूह **S** है जिससे कि $SX_s = B$ या $X_s = S^{-1}B$. और $Z_s = C_s X_s$ उद्देश्य फलन का संगत इष्टतम मान हैं। तब, भाग 8.3 में आपने देखा है कि द्वैत का इष्टतम हल सदिश $\mathbf{Y}^{OT} = C_s S^{-1}$ से प्राप्त हो जाता है।

आइए अब हम यह मान लें कि (13) के सदिश **B** में लघु परिवर्तन Δ **B** होने से इष्टतम आधार S में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस तरह (13) के परिवर्तित दक्षिण पक्ष (right hand side) का इष्टतम हल यह होता है

$$\hat{x_s} = S^{-1}(B + \Delta B)$$
$$= S^{-1}B + S^{-1}\Delta B$$
$$= X_s + \Delta X_s$$

जहाँ $\quad \Delta X_s = S^{-1}\Delta B$

हल $\hat{X}_s$ के संगत उद्देश्य फलन का नया मान यह होता है

$$\hat{Z}_s = Z_s + \Delta Z_s = C_s(X_s + \Delta X_s)$$
$$= C_s X_s + C_s \Delta X_s$$

या $\quad \Delta Z_s = C_s X_s + C_3 \Delta X_s - Z_s$

$$= C_s \Delta X_s \left(\because \; Z_s = C_s X_s C_3\right)$$

$$= C_s B^{-1} \Delta B$$

$$= Y^{0T} \Delta B$$

or $$\frac{\partial Z_s}{\partial b_i} = (Y_0)_i$$

अर्थात् b_i के सापेक्ष इष्टतम उद्देश्य फलन मान Z_s का परिवर्तन दर इष्टतम द्वैत चर $(Y_0)_i$ होता है।

अतः आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सदिश Y^0 से अचर के दक्षिण पक्ष सदिश b में किए गए लघु परिवर्तनों के सापेक्ष इष्टतम लागत की सुग्राहिता (sensitivity) प्राप्त हो जाती है अर्थात् यदि समस्या (13) को हल करना हो जिसमें B परिवर्तित होकर $B + \Delta B$ हो गया, तब उद्देश्य फलन के इष्टतम मान में $Y \Delta B$ का परिवर्तन होगा। इस तरह, $(Y_0)_i$ को घटक b_i की सीमांत कीमत (marginal price) माना जा सकता है (क्योंकि यदि b_i परिवर्तित होकर $b_i + \Delta b_i$ हो गया हो, तो इष्टतम उद्देश्य फलन के मान में $Y_i \Delta b_i$ का परिवर्तन होता है, जबकि इष्टतम आधार में कोई परिवर्तन न हुआ हो)।

उदाहरण के लिए निम्नलिखित समस्या लीजिए:

केमिकल डाई बनाने वाला एक फर्म दो नए उत्पादों का उत्पादन करने के बारे में विचार कर रहा है। प्रत्येक उत्पाद को दो मशीनों A और B पर बनाने में जो समय लगता है उसे नीचे की सारणी में दिखाया गया है। उत्पाद I और उत्पाद II की प्रति इकाई लाभ क्रमशः 5 रु० और 6रु० हैं। बताइए कि हर सप्ताह प्रत्येक उत्पाद को कितनी इकाइयों का निर्माण किया जाए जिससे कि फर्म को अधिकतम लाभ हो सके। और, आय और द्वैत चरों के इष्टतम मानों का आर्थिक निर्वचन भी कीजिए।

दो उत्पादों के निर्माण के आँकडे

उत्पाद	**प्रति इकाई उत्पाद के लिए मशीन A पर लगा समय (घंटों में)**	**प्रति इकाई उत्पाद के लिए मशीन B पर लगा समय (घंटों में)**
I	2	1
II	3	1
कुल उपलब्ध समय (घंटा/सप्ताह)	24	10

आइए हम यह मान लें कि पहले उत्पाद की निर्मित इकाइयों की संख्या x_1 और दूसरे उत्पाद की इकाइयों की संख्या x_2 हैं। ऊपर दी गई संख्या का गणितीय रूप यह है

$$Z = 5x_1 + 6x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 \le 24$$

$$x_1 + x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

जहाँ Z, रुपयों में लाभ को प्रकट करता है; पहले और दूसरे व्यवरोध मशीनों A और B पर दो उत्पादों के उत्पाद पर लगाए गए समय प्रतिबंध (घंटों में) को क्रमशः प्रकट करते हैं। अंतिम दो प्रतिबंध इस बात को व्यक्त करते हैं कि किसी भी उत्पाद की उत्पादित इकाइयों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती। इस आद्य का इष्टतम हल यह होता है

$$x_1^0 = 6, x_2^0 = 4 \text{ और अधिकतम } Z = 54$$

ऊपर दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैत समस्या यह है

$$D = 24y_1 + 10y_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 + y_2 \ge 5$$

$$3y_1 + y_2 \ge 6$$

$$y_1, y_2 \quad \ge 0$$

इस द्वैत समस्या का इष्टतम हल यह होता है

$$y_1^0 = 1, y_2^0 = 3 \text{ और न्यूनतम } D = 54$$

अब आप द्वैत समस्या का एक आर्थिक निर्वचन कर सकते हैं। यहाँ, क्योंकि न्यूनतम D = अधिकतम Z और आद्य उद्देश्य फलन का मान रुपयों में ज्ञात किया गया है, इसलिए द्वैत उद्देश्य फलन का मान भी रुपयों में ज्ञात किया जा सकता है। क्योंकि आद्य उद्देश्य फलन Z के अचर रुपयों में लाभ है, इसलिए द्वैत व्यवरोधों में दक्षिण पक्ष के अचर भी रुपयों में होते हैं और, आद्य व्यवरोधों के दक्षिण पक्ष के अचर घंटों में हैं और ये Y में अचर हो जाते हैं, अतः द्वैत चर y_1 और y_2 मशीन A और B को एक घंटे तक चलाने पर रुपयों में होने वाले खर्च हैं।

प्रबल द्वैत प्रमेय के अनुसार कार्यकलाप-समुच्चय y_i^s और कीमत-समुच्चय y_i^s के बीच एक संतुलन बना रहता है, जहाँ अधिकतम उत्पादन लाभ न्यूनतम किराया खर्च के बराबर होता है।

अब आप इष्टतम कीमतों y_1^0 और y_2^0 के निर्वचन को इस रूप में देख सकते हैं क्योंकि $y_1^0 = 1$, इसलिए इष्टतम मान Z में 1 रु० की वृद्धि होगी जबकि मशीन A पर उपलब्ध समय में 1 घंटे की बढ़ोतरी की गई हो (24 घंटे से बढ़ाकर 25 घंटे) बशर्ते मशीन B केवल 10 घंटे के लिए उपलब्ध हो और आद्य के इष्टतम आधार में कोई परिवर्तन न होता हो। इसी प्रकार मशीन B पर उपलब्ध समय में 1 घंटे की वृद्धि करने पर लाभ में (Z के मान) में 3 रु० $(= y_2^0)$ की वृद्धि होती है, बशर्ते मशीन A केवल 24 घंटे के लिए उपलब्ध हो और आद्य के इष्टतम आधार में परिवर्तन न होता हो।

आप यहाँ यह देख सकते है कि यदि मशीन B पर उपलब्ध समय 10 घंटा हों तो आवश्यक नहीं है कि इसका यह अर्थ हो कि लाभ में hy_1^0 (= h) की वृद्धि होगी जबकि मशीन A पर उपलब्ध समय को बढ़ाकर (24 + h) घंटा कर दिया गया हो। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि यदि h बहुत छोटा नहीं है तो आद्य के इष्टतम आधार में परिवर्तन आ सकता है। आद्य समस्या का इष्टतम आधार यह होता है

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b = (24, 10)^T$– आद्य व्यवरोधों के दक्षिण पक्ष के व्यवरोधों का सदिश-बदलकर $(24 + h, 10)^T$ हो गया है, आधार आव्यूह S इष्टतम बना रहता है जबकि S द्वारा उपलब्ध आधार हल सुसंगत होता है, अर्थात् जबकि

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 24 + h \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - h \\ 4 + h \end{pmatrix} \geq 0.$$

इस तरह, यदि h > 0 हो तो इष्टतम आधार समान नहीं बना रह सकता। इष्टतम आद्य मान x_i^0, i = 1, 2, D के परिवर्तन-दर को प्रकट करता है जबकि द्वैत के i वें व्यवरोध के दक्षिण पक्ष के अचर में परिवर्तन न होता हो, बशर्ते इस परिवर्तन से द्वैत समस्या के इष्टतम आधार में कोई भी परिवर्तन न होता हो।

द्वैत के लाभ (Advantages of duality)

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यदि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या दी हुई हों जिसमें काफी संख्या में व्यवरोध हों और अपेक्षाकृत कम संख्या में चर हों, तो इसके द्वैत में काफी संख्या में चर होंगे और अपेक्षाकृत कम संख्या में व्यवरोध होंगे। अतः इस स्थिति में आद्य समस्या को हल करने के स्थान पर द्वैत समस्या को हल करना उत्तम होता है, क्योंकि हम जानते हैं कि अतिरिक्त चर के स्थान पर अतिरिक्त व्यवरोध होने से अभिकलन में काफी कठिनाई होती है। अतः इस स्थिति में, द्वैत समस्या को हल करने में अपेक्षाकृत कम समय और अपेक्षाकृत कम अभिकलनात्मक कठिनाई होती है।

8.5 सारांश

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

1. आपने यह दिखाया है कि यदि आद्य समस्या का एक परिमित इष्टतम हल हो, तो द्वैत समस्या का भी एक परिमित इष्टतम हल होता है और उसके इष्टतम उद्देश्य फलन के मान बराबर होते हैं।
2. आद्य और द्वैत समस्याओं के इष्टतम हल प्राप्त करने के लिए दो समस्याओं में से किसी भी एक समस्या को हल कर देना पर्याप्त होता है।
3. द्वैत चरों का निर्वचन किया गया है।

8.6 उत्तर/संकेत/हल

E1. देखकर प्राप्त किए गएं आद्य और द्वैत के सुसंगत हल क्रमशः ये हैं

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{3}$ और $y_1 = 7, y_2 = 2$

जहाँ $Z = 12\frac{1}{3}$ और $D = 39$ अर्थात् $Z < D$.

E2. द्वैत यह है

$$Z = 30x_1 + 20x_2 + 16x_3$$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$7x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

आद्य और द्वैत के इष्टतम हल हैं

$$y_1 = 4, y_2 = 1 \,;\, x_1 = \frac{5}{13}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{13}$$

$$\text{Min } D = \text{Max } D = 14.$$

E3. द्वैत यह है

$Z = 4x_1 + 3x_2$	$Z = 4x_1 + 3x_2$
का अधिकतमीकरण	का अधिकतमीकरण कीजिए
जबकि	जबकि
$x_1 + x_2 \le 5$	$x_1 + x_2 \le 5$
$-x_1 - 2x_2 \le -8$	$x_1 + 2x_2 \ge 8$
$-3x_1 - 2x_2 \le -14$	$3x_1 + 2x_2 \ge 14$
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$

द्वैत का कोई भी इष्टतम हल नहीं है। अतः आद्य का भी कोई इष्टतम हल नहीं होगा।

E4. द्वैत यह है

$$Z = 2x_1 + x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि

$$2x_1 + x_2 \le 3$$

$$3x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

इष्टतम हल यह है

$x_1 = 0, x_2 = 1, \text{Max } Z = 1; y_1 = 0, y_2 = 1$ और Min D [illegible]

समीक्षा

यह इस पाठ्यक्रम का दूसरा खंड है। इस खंड में चार इकाइयाँ–इकाई 5, 6, 7 और 8 हैं। वास्तव में यह खंड पाठ्यक्रम का मुख्य खंड है, क्योंकि इसमें एकधा कलन विधि का अध्ययन किया गया है जिसे रैखिक प्रोग्रामन क्षेत्र का आधार माना जाता है।

इकाई 5 में आपको व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या (GLLP), इसके **मानक रूप** और इसके विहित रूप से परिचित कराया गया है। यहाँ आपने **न्यूनतापूरक चर** या **आधिक्यपूरक चर** को जोड़कर एक दी हुई व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को उसके मानक और विहित रूप में परिवर्तित करने की विधि सीखी हैं। इस इकाई में आपको रैखिक प्रोग्रामन समस्या के हलों की प्रकृति और प्रकार से अर्थात् **सुसंगत हल, आधारी सुसंगत हल, इष्टतम हल** से भी परिचित कराया गया है।

इकाई 6 में हमनें मानक रूप और विहित रूप दोनों में ही रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल प्राप्त करने के लिए अभिकलनात्मक कलन-विधि अर्थात् एकधा विधि पर चर्चा की है। इस इकाई में हमने कृत्रिम चरों का प्रयोग करके द्विचरण विधि पर भी चर्चा की है।

इकाई 7 और इकाई 8 में द्वैत पर जो कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने का एक अति शक्तिशाली साधन हैं, चर्चा की गई है। यहाँ हमने आद्य और द्वैत पर चर्चा की है और रैखिक प्रोग्रामन के अध्ययन में द्वैत की प्रासंगिकता पर भी चर्चा की गई है।

इस खंड में बतायी गई संकल्पनाओं और विधियों को आप कितना समझ पाए है? यह देखने के लिए आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए और इस खंड के अंत में दिए गए हल/उत्तर से अपने हल/उत्तर का मिलान कीजिए।

समस्या

P1 (क) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को इस तरह प्रस्तुत कीजिए कि उनके व्यवरोध समिका रूप में हों

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(ख) रैखिक प्रोग्रामन समस्या दी गई है

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1 - 3x_2 \ge -1$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

न्यूनतापूरक चर या आधिक्यपूरक चर जोड़कर इसके व्यवरोधों को समीकरणों में बदलिए।

P2 (क) निम्नलिखित असमीकरणों को समीकरणों के रूप में लिखिए

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 - 7x_3 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ख) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोधों को समीकरणों में बदलिए.

$$Z = 32x_1 + 42x_2$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए

जबकि

$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 10$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 45, x_1, x_2 \geq 0.$$

P3 (क) $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

x_1 अप्रतिबंधित, $x_2, x_3 \geq 0.$

(ख) $Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -5$$
$$-6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 15$$
$$7x_1 + 6x_2 - 12x_3 \leq 11$$
$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ अप्रतिबंधित}$$

(ग) $Z = 8x_1 - 7x_2 + 5x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 - 7x_3 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0, x_2, x_3 \text{ अप्रतिबंधित}$$

P4 (क) निम्नलिखित का आधारी हल और आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$
$$x_1 - 2x_2 + 6x_2 - 7x_4 = -3$$

(ख) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 21$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = -9$$

का एक सुसंगत हल है

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 1.$$

एक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए।

P5 एकधा विधि से निम्नलिखित को हल कीजिए

(क) $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 7$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(ख) $Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 7$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9$

$x_1, x_2 x_3 \geq 0$

(ग) $Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7$

$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3$

$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 x_4 \geq 0$

P6 (क) $Z = 2x_1 + x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$6x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geqq 0$

(ख) $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 5$

P7 द्विचरण विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए

(क) $Z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ख) $Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

P8 दिखाइए कि द्विचरण विधि से निम्नलिखित समस्याओं को किस प्रकार हल किया जाएगा

(क) $Z = x_1 + x_2 + x_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ख) $Z = x_1 + 5x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

P9 निम्नलिखित का द्वैत लिखिए

(क) $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$

का अधिकतमीकरण लीजिए जबकि

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 7$$
$$-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ख) $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 11x_4$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(ग) $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 5$

$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 \le 11$

$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

P 10 (क) समीकरण-निकाय

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

क्या चर x_3, x_4 न्यूनतापूरक या आधिक्यपूरक चर हैं?

(ख) क्या समीकरण-निकाय

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

का हल $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$

(i) सुसंगत (ii) आधारी सुसंगत (iii) आधारी (iv) कोई भी नहीं है।

(ग) एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी इष्टतम आधारी सुसंगत हल के लिए

(i) सभी $\Delta_j \ge 0$ (ii) कम से कम एक $\Delta_j \le 0$

(iii) एक या अधिक $\Delta_j \le 0$ (iv) इनमें से कोई भी नहीं।

सही उत्तर चुनिए।

समीक्षा/उत्तर/संकेत/हल

P1 (क) $Z = 2x_1 + 3x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$-x_1 + 2x_2 - x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ (x_2 –न्यूनतापूरक, x_4 –आधिक्यपूरक)

(ख) $Z = 3x_1 + 2x_2$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 - x_2 - x_4 = -1$

$-x_1 + 2x_2 - x_5 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

(x_3 –न्यूनतापूरक ; x_4, x_5 –आधिक्यपूरक)

P 2 (क) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$

$2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_5 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(x_4 –आधिक्यपूरक ; (x_5 –न्यूनतापूरक)

(ख) $Z = 32x_1 + 24x_2$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$x_1 + x_3 = 8$

$x_2 + x_4 = 10$

$5x_1 + 2x_2 - x_5 = 45$

$x_1 - x_5 \geq 0$

(x_3, x_4 –न्यूनतापूरक, x_5 –आधिक्यपूरक)

P 3 (क) $Z = 3x_1' - 3x_1'' + 2x_2 + 5x_3$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$2x_1' - 2x_1'' + 3x_2 + x_4 = 3$

$4x_1' - 4x_1'' + 3x_2 + 3x_3 - x_5 = 5$

$2x_1' - 2x_1'' + x_2 + x_6 = 2$

$x_1', x_2'', x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

(ख) $Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3' - 6x_3''$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$-x_1 - x_2' + 2x_3' - 2x_3'' + x_4 = 5$

$-6x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' = 15$

$7x_1 - 6x_2 - 12x_3' + 12x_3'' + x_5 = 11$

$x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0.$

(ग) $Z = 8x_1 - 7x_2' + 7x_2'' + 5x_3' - 5x_3''$

का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि

$x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + 3x_3' - 3x_3'' - x_4 = 5$

$2x_1 + x_2' - x_2'' - 7x_3' + 7x_3'' + x_5 = 3$

$x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0.$

P 4 (क) $(1, 2, 0, 0), \left(\frac{22}{9}, 0, 0, \frac{7}{9}\right), \left(0, 0, \frac{44}{17}, \frac{45}{17}\right)$

सभी तीन आधारी हल आधारी ससंगत हैं।

(ख) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{39}{10}, x_4 = \frac{9}{10}, x_5 = 0$

P 5 (क) Max $Z = 14$ (ख) $Max\ Z = \frac{97}{14}$

(ग) Max $Z = \frac{83}{19}$

P 6 (क) Max $Z = \frac{33}{4}$ (ख) $Max\ Z = 11$

P 7 (क) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0,$ Min $Z = 10$

(ख) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{2};$ Min $Z = \frac{5}{2}$

P8 (क) $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{5}{3},$ Min $Z = 3$

(ख) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2},$ Max $Z = \frac{15}{2}$

P 9 (क) $D = 7y_1 + 5y_2 + 3y_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 5$$
$$y_1 + 2y_2 - 7y_3 \geq 2$$
$$4y_1 - 3y_2 + 2y_2 \geq -3$$

$y_1 \geq 0, y_3, y_4$ अप्रतिबंधित

(ख) $D = 4u + 2v$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4u + 3v \geq 2$$
$$6u + 2v \geq 1$$
$$2u - 4v \geq -3$$
$$5u + 3v \geq -11$$

u , v अप्रतिबंधित

(ग) $D = 5y_1 + 11y_2 + 13y_3$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$4y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$3y_1 + 8y_2 + 6y_3 \geq 5$$
$$-2y_1 + 7y_2 + 5y_3 \geq 9$$

$y_1, y_2 \geq 0$; y_3 अप्रतिबंधित

P10 सभी भाग के उत्तर इस खंड के पाठ में मिल सकते हैं।

8.7 शब्दायली

आद्य	primal
इष्टलमत्व	optimality
एकता गुणक	simplex multiples
दुर्लभ द्वैत	weak duality
द्वैत	duality
प्रबल द्वैत	strong duality

NOTES

NOTES

NOTES

124

खंड

3

विशिष्ट रैखिक प्रोग्रामन समस्याएें
(Special Linear Programming Problems)

पूर्वदर्शन (Preview)

खंड 1 में आपने दो चरों वाली **रैखिक प्रोग्रामन समस्या** (Linear Programming Problem) का अध्ययन किया है और इस समस्या को (ज्यामितीय) ग्राफीय विधि से हल किया है। तीन चरों वाली रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने में ग्राफीय विधि तो लागू की जा सकती है, पर यह विधि न तो सुविधाजनक होती है और न ही सरल। पर, यदि तीन से अधिक चरों वाली समस्या हो, तो इसे हल करने में यह विधि लागू नहीं होती। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए हम एक बीजीय विधि (व्यापक विधि) का प्रयोग करते हैं जिसे **एकधा विधि** (Simplex Method) कहा करते हैं। इस विधि पर चर्चा हम खंड 2 में कर चुके हैं। इसी खंड में हमने आपको **आद्यों** (Primals) और **द्वैतों** (Duals) की संकल्पनाओं से और रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में इनके प्रयोग से परिचित कराया है।

इस खंड में हम खंड 2 में बतायी गई समस्याओं से भिन्न कुछ **विशिष्ट रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं** (Typical Linear Programming Problem) पर चर्चा करेंगे। इन समस्याओं को विशिष्ट रैखिक समस्या इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इनकी संरचना कुछ विशिष्ट होती हैं। हालांकि एकधा विधि से इन समस्याओं को हल किया जा सकता है, पर क्योंकि इन समस्याओं की प्रकृति और संरचना विशिष्ट होती है, इसलिए इन्हें हल करने की कुछ विशिष्ट विधियां प्राप्त की गई हैं जो कि अधिक सरल और अधिक सुविधाजनक हैं। इस पाठ्यक्रम में हम केवल दो प्रकार की समस्याओं पर ही चर्चा करेंगे। यदि आप इस क्षेत्र के बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं, तो आप अधिक विशिष्ट रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को मानक पाठ्यपुस्तकों का अध्ययन कर सकते हैं। इन दो प्रकार की समस्याओं को **परिवहन समस्या** (Transportation Problems) और **नियतन समस्या** (Assignment Problems) कहते हैं। इस खंड की पहली तीन इकाइयों अर्थात् इकाइयों 9, 10 और 11 में हम **परिवहन समस्या** पर चर्चा करेंगे और इकाई 12 में हम **नियतन समस्या** पर चर्चा करेंगे।

इकाई 9 में हम कुछ उदाहरण लेकर परिवहन समस्या को समझने की कोशिश करेंगे। इकाई 10 में, हालांकि **व्यवरोध** (Constraints) समीकरण के रूप में है, फिर भी कृत्रिम चरों का प्रयोग किए बिना ही हम **प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल** (Initial Basic Feasible Solution) प्राप्त करने की विधि पर चर्चा करेंगे। इकाई 11 में हम परिवहन समस्या को हल करने की कलन-विधि (अभिकलनात्मक विधि) पर चर्चा करेंगे। इकाई 12 में **नियतन समस्या** (AP) और उसे हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

इकाई 9 परिवहन समस्या (The Transportation Problem)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाइयों में आप एकधा विधि से **रैखिक प्रोग्रामन** (LPP) को हल करने की तकनीक से परिचित हो चुके हैं। इस इकाई में हम आपको एक विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या, जिसे परिवहन समस्या कहते हैं, से परिचित कराएंगे। ध्यान रहे कि परिवहन समस्या की संरचना कुछ ऐसी होती है कि हल करने की प्रक्रिया में अनेक बार सरलीकरण करना पड़ता है। यही कारण है कि परिवहन समस्या पर चर्चा एक बिल्कुल ही अलग इकाई में की गई है।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- परिवहन समस्या को पहचान सकेंगे,
- संतुलित परिवहन समस्या और असंतुलित परिवहन समस्या में भेद कर सकेंगे,
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में परिवहन समस्या का संरूपण कर सकेंगे,
- परिवहन समस्या को सारणी रूप में निरूपित कर सकेंगे,
- परिवहन समस्या के विशेष अभिलक्षण जान सकेंगे।

9.2 परिवहन समस्या–एक परिचय (Introduction to the Transportation Problem)

मान लीजिए ऊषा सिलाई मशीन कंपनी के दो निर्माण केन्द्र हैं-एक मेरठ में और दूसरा कानपुर में। मेरठ के केन्द्र में प्रतिदिन 50 मशीनें बनती हैं और कानपुर के केन्द्र में प्रतिदिन 55 मशीनें बनती हैं। पर रोज शाम को इन केन्द्रों से दिल्ली, भोपाल और देहरादून के बाजारों में इन मशीनों को भेजना होता है। इन बाजारों की रोज की मांग नियत है दिल्ली में 40 मशीनें, भोपाल में 30 मशीनें और देहरादून में 35 मशीनें। यहां आप इस बात की ओर ध्यान दे सकते है कि

i) दो केन्द्रों से भेजी गई मशीनों की संख्या = 50 + 55 = 105

ii) तीन बाजारों में मशीनों की मांग = 40 + 30 + 35 = 105

इस तरह यहां हम देखते हैं कि सप्लाई स्थानों पर उपलब्ध मशीनों की कुल संख्या = बाजारों में मांग की गई मशीनों की कुल संख्या।

जब स्थिति इस प्रकार की होती है, तब हम यह कहते हैं कि समस्या **संतुलित** (Balanced) है।

अब, मान लीजिए कि कानपुर के केन्द्र पर हर रोज 70 मशीनें बनती हैं और अन्य सभी आंकड़े वही हैं जो कि ऊपर बताए गए हैं। तब, इस स्थिति में उपलब्ध मशीनों की संख्या मांग की गई कुल संख्या से अधिक होती है। ऐसी स्थिति में समस्या को **असंतुलित** (Unbalanced) कहा जाता है। इसी प्रकार, यदि देहरादून के बाजार में मांग की कुल संख्या 35 के स्थान पर 60 हो और अन्य सभी आंकड़े वही हों जो कि ऊपर बताए गए हैं तो

मांग की कुल संख्या उपलब्ध मशीनों की कुल संख्या से अधिक हो जाती है। जब ऐसी स्थिति में भी हम यह कहते हैं कि समस्या असंतुलित है।

इस तरह, हम यह देखते हैं कि यदि उपलब्ध मशीनों की कुल संख्या मांग की गई कुल संख्या के बराबर हो, तो समस्या संतुलित होती है और यदि उपलब्ध मशीनों की कुल संख्या और मांग की गई कुल संख्या में अंतर हो तो समस्या असंतुलित होती है।

आइए अब हम अपनी समस्या पर विचार करें। यहां हम जिस समस्या पर चर्चा करने जा रहे हैं वह एक संतुलित समस्या है। यहां मेरठ और कानपुर के निर्माण-केन्द्रों से दिल्ली, भोपाल और देहरादून के बाजारों में मशीनों को इस तरह भेजना है कि प्रत्येक बाजार की मांग को ठीक-ठीक पूरा किया जा सके। यह तभी संभव है जबकि निर्माण-केन्द्र अपनी मशीनों को पूरी तरह से भेज दे। अब, मान लीजिए कि ट्रान्सपोर्टर मशीनों को मेरठ से दिल्ली ले जाने के लिए प्रति मशीन 5 रु. की दर से, मेरठ से भोपाल ले जाने के लिए प्रति मशीन 15 रु की दर से और मेरठ से देहरादून ले जाने के लिए प्रति मशीन 10 रु. की दर से चार्ज करता है। इसी प्रकार, ट्रान्सपोर्टर मशीनों को कानपुर से दिल्ली ले जाने के लिए प्रति मशीन 10 रु., कानपुर से भोपाल के लिए 8 रु. और कानपुर से देहरादून के लिए प्रति मशीन 20 रु. की दर से चार्ज करता है। इस तरह पूरी समस्या के आंकड़े हमें उपलब्ध हो गए हैं। परिवहन समस्या के अंतर्गत हमें यह मालूम करना होता है कि कितनी संख्या में मशीनों को मेरठ के निर्माण-केन्द्र से तीनों बाजार को और कानपुर के निर्माण-केन्द से तीनों बाजार को भेजा जाए जिससे कि बाजारों की मांग को ठीक-ठीक पूरा किया जा सके और साथ ही परिवहन पर होने वाले कुल खर्च को कम से कम किया जा सके। यहां इस बात की ओर आप ध्यान दे सकते हैं कि क्योंकि समस्या संतुलित है इसलिए बाजारों की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति होगी यदि और केवल यदि निर्माण-केन्द्र उपलब्ध अपनी सभी मशीनों को विभिन्न बाजारों में भेज दे। क्या आप बता सकते हैं कि यदि समस्या असंतुलित होती तो क्या होता? स्पष्ट है कि यदि उपलब्ध मशीनों की संख्या मांग की संख्या से अधिक हो तो मेरठ और/या कानपुर के निर्माण-केन्द्रों पर कुछ मशीनों को रख लिया जाता और उन्हें नहीं भेजा जाता। और, यदि उपलब्ध मशीनों की संख्या की तुलना में मांग की संख्या अधिक हो तो कुछ बाजारों को अपनी मांग के अनुसार पूरा माल प्राप्त नहीं होगा अर्थात् सप्लाई की कमी रहेगी।

ऊपर हमने आपको एक छोटी परिवहन समस्या के एक उदाहरण से परिचित कराया है। अब हम आपको धीरे-धीरे गणित के प्रतीकों और संकेतों की दुनिया में ले चलेंगे।

i) मेरठ और कानपुर जैसे केन्द्रों को, जहाँ बाहर भेजने के लिए मशीनों या माल को भंडारित किया जाता है, **स्रोत** (Source), **उद्गम** (Origin) या **गोदाम** (Warehouse) कहा जाता है। यहां हमने जो उदाहरण लिया है उसमें केवल दो स्रोत हैं, पर, स्रोतों की संख्या अधिक यानी m भी हो सकती है। इन्हें S_1, S_2, ... आदि से, या O_1, O_2, ... आदि से या इसी प्रकार के किसी अन्य प्रतीक से प्रकट किया जाता है। ऊपर के उदाहरण में तीन बाजार हैं, जो दिल्ली, भोपाल और देहरादून में स्थित हैं। जहां माल की मांग होती है और जहां स्रोत से माल भेजा जाता है। इन बाजारों को गंतव्य स्थान (Destination) या बाजार कहा जाता है और इन्हें प्राय: D_1, D_2, ... आदि से प्रकट किया जाता है। यहां भी गंतव्य स्थानों की संख्या तीन से अधिक यानी n हो सकती है। ध्यान दीजिए कि m और n बराबर हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।

ii) मेरठ के केन्द्र में उपलब्ध मशीनों की संख्या 50 है और कानपुर के केन्द्र में 55 है। प्रतीकों में इन केन्द्रों में उपलब्ध मशीनों की संख्या को क्रमश: $a_1 = 50$, $a_2 = 55$

से प्रकट किया जाता है। यदि निर्माण केन्द्र m हो, तो इन m निर्माण-केन्द्रों में मशीनों की संख्या को क्रमश: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ से प्रकट करते हैं। दिल्ली, भोपाल और देहरादून में मांग की गई मशीनों की संख्या क्रमश: 40, 30 और 35 हैं। इसे $b_1 = 40$, $b_2 = 30$ और $b_3 = 35$ से प्रकट किया जाता है। यदि गंतव्य स्थान n हो, तो n मानों को $b_1, b_2, \ldots, b_n$ से प्रकट किया जाता है।

iii) रैखिक प्रोग्रामन समस्या में चर $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हैं और ऐसा इसलिए है, क्योंकि स्रोतों का एक समुच्चय है और बाजारों का एक अन्य समुच्चय है। आइए देखें कि इस कार्य को हम किस प्रकार कर सकते हैं। हम ऊपर बता चुके हैं कि **परिवहन समस्या** (TP) के अंतर्गत प्रत्येक स्रोत से विभिन्न गंतव्य स्थानों को जाने वाले माल की मात्रा ज्ञात करना होता है। अत: मान लीजिए i वें स्रोत से j वें गंतव्य स्थान को भेजे जाने वाले माल की मात्रा X_{ij} है। इस तरह, X_{12} का अर्थ होगा स्रोत 1 (जो कि उदाहरण में मेरठ है) से गंतव्य स्थान 2 (जो कि उदाहरण में भोपाल है) को भेजे जाने वाले माल की मात्रा। इसी प्रकार, x_{23} का अर्थ होगा स्रोत 2 से गंतव्य स्थान 3 (जो उदाहरण में कानपुर से देहरादून) को भेजे जाने वाले माल की मात्रा। यहां यह ध्यान दीजिए कि **अनुलग्नों** (Suffixes) के **क्रमित युग्म** (Ordered Pairs) में पहली संख्या स्रोत को और दूसरी संख्या गंतव्य स्थान को प्रकट करती हैं। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि ऊपर दिए गए उदाहरण में चरों की संख्या कितनी है? स्पष्ट है कि चरों की संख्या छै है–अर्थात् मेरठ से दिल्ली, भोपाल और देहरादून के लिए x_{11}, x_{12}, x_{13} और कानपुर से इन बाजारों के लिए x_{21}, x_{22}, x_{23}. इस तरह, एक व्यापक परिवहन समस्या में, जिसमें 'm' स्रोत है और '**n**' गंतव्य स्थान है, चरों की संख्या $m \times n$ (उदाहरण में 2×3) होती है।

iv) ठीक इसी प्रकार के खर्चे को C_{ij} से प्रकट किया जाता है। इस तरह, C_{11}, C_{12}, C_{13} मेरठ से दिल्ली, भोपाल और देहरादून के बाजारों को माल भेजने में प्रति इकाई परिवहन खर्च है और C_{21}, C_{22}, C_{23} कानपुर से दिल्ली, भोपाल और देहरादून के बाजारों को माल भेजने में प्रति इकाई खर्च है।

अब सारांश रूप में हम यह कह सकते हैं कि यदि आंकड़े दिए हुए हों अर्थात् विभिन्न स्रोतों पर उपलब्ध माल की मात्रा a_i, गंतव्य स्थानों की मांग b_j और विभिन्न स्रोतों से गंतव्य स्थान को माल भेजने में प्रति इकाई परिवहन खर्च C_{ij} दिए हुए हों, तो परिवहन समस्या को हल करने का अर्थ है चरों x_{ij} की मान ज्ञात करना अर्थात् विभिन्न स्रोतों से गंतव्य स्थानों को भेजे जाने वाले माल की मात्रा ज्ञात करना जिससे कि परिवहन खर्च कम से कम हो। यहां यह मान लिया गया है कि परिवहन समस्या संतुलित (Balanced) है।

पर यदि परिवहन समस्या असंतुलित हो, तो आपको जानकारी के लिए यहाँ हम यह बता देना चाहते हैं कि इसके लिए हम एक ऐसी संतुलित परिवहन समस्या संरूपित कर सकते हैं जिसके हल से दी हुई असंतुलित परिवहन समस्या का हल प्राप्त हो जाता है। इस विषय पर चर्चा हम इकाई 11 में करेंगे। इस इकाई में जिन परिवहन समस्याओं पर चर्चा की गई हैं वे सभी संतुलित समस्याएं हैं।

अब हम सिलाई मशीनों की परिवहन समस्या वाले उदाहरण लेकर इस संकल्पना को विकसित करेंगे और परिवहन समस्या का व्यापक गणितीय निदर्श (Mathematical Model) प्राप्त करेंगे।

9.3 परिवहन समस्या का गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation of a Transportation Problem)

ऊपर बतायी गई संकेतन पद्धति के अनुसार आइए हम मेरठ से भेजे जाने वाली मशीनों की इकाइयों को लें अर्थात् स्रोत S_1 से दिल्ली (D_1), भोपाल (D_2) और देहरादून (D_3) को भेजे जाने वाली मशीनों की इकाइयां लें। S_1 से D_1, D_2, D_3 को भेजे जाने वाली इकाइयां क्रमशः x_{11}, x_{12}, x_{13} हैं और मेरठ केन्द्र पर उपलब्ध कुल इकाइयां $a_1 = 50$ हैं। क्योंकि ठीक-ठीक सभी इकाइयों को भेजना है, इसलिए

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \quad (1)$$

इसी प्रकार, कानपुर (S_2) से दिल्ली (D_1), भोपाल (D_2) और देहरादून को भेजे जाने वाली इकाइयों को क्रमशः x_{21}, x_{22}, x_{23} से प्रकट किया जाता है। कानपुर (S_2) में उपलब्ध इकाइयां 55 हैं और इन सभी इकाइयों को भेजना है। अतः

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 55 \quad (2)$$

आइए अब हम बाजारों की मांग को ध्यान में रखकर परिवहन समस्या पर विचार करें। दिल्ली (D_1), मेरठ (S_1) से x_{11} प्राप्त करता है और कानपुर (S_2) से x_{21} प्राप्त करता है। दिल्ली (D_1) की कुल मांग 40 इकाइयों की है जिनकी ठीक-ठीक पूर्ति करनी है। इस तरह, हमें यह प्राप्त होगा

$$x_{11} + x_{21} = 40 \quad (3)$$

भोपाल (D_2) की कुल मांग 30 इकाइयों की है। भोपाल (D_2) को मेरठ से X_{12} इकाइयां प्राप्त होती हैं और कानपुर से x_{22} इकाइयां प्राप्त होती है। अतः हमें यह प्राप्त होगा

$$x_{12} + x_{22} = 30 \quad (4)$$

इसी प्रकार देहरादून (D_3) की मांग 35 इकाइयों की है जिसकी ठीक-ठीक पूर्ति करना है। देहरादून (D_3) को मेरठ (S_1) से x_{13} इकाइयां प्राप्त होती हैं और कानपुर (S_2) से x_{23} इकाइयां प्राप्त होती हैं। अतः हमें यह प्राप्त होगा

$$x_{13} + x_{23} = 35 \quad (5)$$

इस तरह (1) से (5) तक चरों पर लगे पांच व्यवरोध (Constraints) हैं और इस तरह ये परिवहन समस्या के व्यवरोध हैं।

और, प्रत्येक स्रोत विभिन्न केन्द्रों को या तो धन संख्या में मशीन भेजता है या एक भी मशीन नहीं भेजता। यह ऋण संख्या में मशीन नहीं भेज सकता। अतः सभी चर ऋणेतर (Non-Negative) होते हैं अर्थात्

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{13} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0, \quad x_{23} \geq 0$$

इन व्यवरोधों को हम संहत रूप में इस प्रकार रख सकते हैं

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

vi) चरों पर प्रतिबंध हैं।

हमारा उद्देश्य कुल परिवहन खर्च को कम से कम करना है। अब, C_{11} मशीन को मेरठ (S_1) से दिल्ली भेजने में प्रति इकाई खर्च है क्योंकि यहां हम X_{11} इकाइयां (जिसे ज्ञात करना है) भेज रहे हैं, इसलिए x_{11} इकाइयों को मेरठ से दिल्ली भेजने में परिवहन खर्च $C_{11}x_{11}$ होगा। इसी प्रकार x_{12} इकाइयों को मेरठ (S_1) से भोपाल भेजने में परिवहन खर्च $C_{12}x_{12}$ होगा और x_{13} इकाइयों को मेरठ (S_1) से देहरादून भेजने में परिवहन खर्च $C_{13}x_{13}$ होगा। इसी प्रकार हम इकाइयों को कानपुर से इन तीन गंतव्य स्थानों को भेजने पर होने वाला खर्च मालूम कर सकते हैं।

अत: परिवहन पर होने वाला कुल खर्च यह होगा

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} C_{ij}\, x_{ij} \qquad (7)$$

परिवहन समस्या (TP) का हल करने का अर्थ है चरों (x_{ij}, $i = 1,2; j = 1, 2, 3$) के ऐसे मान ज्ञात करना जोकि समीकरणों (1) – (7) को संतुष्ट करते हों और Z को, जैसा कि (7) में दिया गया है, निम्नतम कर देते हों।

इस समस्या को हम एक व्यवस्थित ढंग से रखकर एक **रैखिक प्रोग्रामन समस्या** (LPP) के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं और इसे हम समस्या P–I कह सकते हैं

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} \qquad (8)$$

जबकि

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \qquad (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 55 \qquad (2)$$

$$x_{11} + x_{21} = 40 \qquad (3)$$

$$x_{12} + x_{22} = 30 \qquad (4)$$

$$x_{13} + x_{23} = 35 \qquad (5)$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \qquad (6)$$

या

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$$

अब आप यह देख सकते हैं कि यह एक **रैखिक प्रोग्रामन समस्या** (LPP) है जिसमें (1) उद्देश्य फलन Z है जिसका न्यूनतमीकरण करना है (2) 5 व्यवरोध हैं जिनमें से दो व्यवरोध प्रत्येक स्रोत पर उपलब्ध माल के कारण है और तीन व्यवरोध मांग की आवश्यकताओं के कारण है और (3) चरों की **ऋणेतरता** (Non–Negativity) का प्रतिबंध है।

आप संक्षेप में इन व्यवरोधों को इस रूप में रख सकते हैं:

(1) को $\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 50$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(2) को $\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 55$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(3) को $\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 40$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(4) को $\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 30$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(5) को $\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 35$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अब, (1) और (2) को इस रूप में भी रखा जा सकता है

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2$$

(3), (4), (5) को इस रूप में भी रखा जा सकता है

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_i, \; j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1,2, \; j = 1, 2,3.$$

व्यापक **परिवहन समस्या** (TP) में m स्रोत $S_1, S_2, \ldots, S_m$ हो सकते हैं जिनकी क्षमताएं क्रमशः $a_1, a_2, \ldots, a_m$ हैं। और, n गंतव्य स्थान $D_1, D_2, \ldots, D_n$ हो सकते हैं जिनकी मांगे क्रमशः $b_1, b_2, \ldots, b_n$ हैं। मान लीजिए X_{ij} वे इकाइयां (जिन्हें ज्ञात करना है) हैं जिन्हें स्रोत S_i से गंतव्य स्थान D_j भेजना है, जहां $i = 1, 2, \ldots, m$ और $j = 1, 2, \ldots, n$. तब परिवहन समस्या का गणितीय निदर्श निम्नलिखित समस्या (P–II) हो जाता है :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

इस समस्या को संतुलित समस्या होने के लिए क्या प्रतिबंध होना चाहिए? समस्या तब संतुलित होती है जबकि सभी स्रोतों पर माल की उपलब्धता सभी गंतव्य स्थानों पर माल की

कुल मांग के बराबर होती हो। अत: समस्या को संतुलित होने के लिए यह आवश्यक है कि

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

अर्थात् $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

समस्या असंतुलित समस्या कब होती है? स्पष्ट है कि समस्या असंतुलित तब होती है जबकि

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

अर्थात् या तो $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

या $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

सिलाई मशीन कंपनी की परिवहन समस्या में दो स्रोत और तीन बाजार हैं। इस प्रकार की समस्या को प्राय: 2×3 परिवहन समस्या कहा जाता है क्योंकि यहां स्रोतों की संख्या 2 है और गंतव्य स्थानों की संख्या 3 है। आइए अब हम कुछ बड़ी परिवहन समस्या का **गणितीय निदर्श** (Mathematical Model) लिखने की कोशिश करें। इसके लिए इन आंकड़ों की आवश्यकता होती है (1) उपलब्धताएं a_i, (2) मांग b_j और (3) खर्च C_{ij}. यहां हम चर x_{ij} लेते हैं। नीचे दिए गए उदाहरण में, 'm' स्रोतों की संख्या को और 'n' गंतव्य स्थानों की संख्या को प्रकट करते हैं।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित परिवहन समस्या का गणितीय निदर्श लिखिए।

$$m = 3, n = 3$$

$$a_1 = 25, a_2 = 35, a_3 = 40$$

$$b_1 = 30, b_2 = 28, b_3 = 42$$

$$C_{11} = 5, C_{12} = 7, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 3, C_{22} = 6, C_{23} = 5$$

$$C_{31} = 1, C_{32} = 12, C_{33} = 4$$

हल : ऊपर बतायी गई विधि को लागू करके आप यह देख सकते हैं कि इस समस्या का गणितीय निदर्श यह है :

$$Z = 5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23} + x_{31} + 12x_{32} + 4x_{33}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 35,$ $\quad$ $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 28$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40,$ $\quad$ $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 42$

$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \; j = 1, 2, 3.$

प्रश्न 1 : निम्नलिखित परिवहन समस्या का गणितीय निदर्श लिखिए।

$m = 3, \qquad n = 4$

$a_1 = 70$	$a_2 = 50$	$a_3 = 90$	
$b_1 = 50$	$b_2 = 40$	$b_3 = 50$	$b_4 = 70$
$C_{11} = 5$	$C_{12} = 7$	$C_{13} = 6$	$C_{14} = 4$
$C_{21} = 2$	$C_{22} = 8$	$C_{23} = 3$	$C_{24} = 1$
$C_{31} = 1$	$C_{32} = 7$	$C_{33} = 4$	$C_{34} = 5$

9.4 परिवहन समस्या का सारणी निरूपण (Tabular Representation of a TP)

ऊपर की चर्चा में आपने यह देखा है कि परिवहन समस्या एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या होती है। इस समस्या को एक सारणी के रूप में आसानी से प्रस्तुत किया जा सकता है। जिसे देखते ही आपका सभी आंकड़े और चर आपको प्राप्त हो जाते हैं। ऐसा करने से केवल यही लाभ नहीं होता है, बल्कि इन सारणियों की सहायता से परिवहन समस्या को हल करने में भी काफी सुविधा हो जाती है जैसा कि आप अगली इकाइयों में देखेंगे। यहां हम सिलाई मशीन वाली परिवहन समस्या (P–1) को लेकर इस संकल्पना को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे और इसके बाद आप प्रश्नों के रूप में दी गई समस्याओं E–1 और E–2 को हल करने का प्रयास करेंगे। समस्या (P–1) में दो स्रोत मेरठ में S_1 और कानपुर में S_2 हैं और तीन गंतव्य स्थान दिल्ली में D_1, भोपाल में D_2 और देहरादून में D_3 हैं। इस तरह स्रोतों और गंतव्य स्थानों को जोड़ने वाली 6 कड़ियां या मार्ग हैं–3 कड़ियां तो S_1 को क्रमशः D_1, D_2, D_3 को जोड़ने वाली और 3 कड़ियां S_2 को क्रमशः D_1, D_2, D_3 को जोड़ने वाली। हम इन 6 कड़ियों या मार्गों को 6 आयताकार (वर्गाकार) खंडों में निरूपित करते हैं जिन्हें स्रोतों की संगत 2 क्षैतिज पट्टियों और बाजार या गंतव्य स्थानों की संगत ऊर्ध्वाधर पट्टियों से बनाया जाता है। इसे नीचे की सारणी T–1 में दिखाया गया है :

सारणी-I

	(दिल्ली)	(भोपाल)	(देहरादून)	उपलब्धता
(मेरठ) S_1	$C_{11} = 5$ (1, 1)	$C_{12} = 15$ (1, 2)	$C_{13} = 10$ (1, 3)	50
(कानपुर) S_2	$C_{21} = 10$ (2, 1)	$C_{22} = 8$ (2, 2)	$C_{23} = 20$ (2, 3)	53
मांग $\rightarrow b_j$	40	30	35	

S_1 और D_1 के प्रतिच्छेद वाले खंड को (1, 1) कोष्ठिका (Cell) कहा जाता है। S_2 और D_3 के प्रतिच्छेद वाले खंड को (2, 3) कोष्ठिका कहा जाता है, आदि आदि। सभी कोष्ठिकाओं (या कड़ियों) को सारणी T–I में लिख दिया जाता है। स्रोतों की उपलब्धता की क्षैतिज पंक्तियों के सिरे पर और बाजार की मांग को क्षैतिज पंक्ति के **संगत स्तंभ** (Corresponding Column) के तल पर दिखाया गया है। अब आगे की चर्चा में हम **क्षैतिज पट्टियों** (Horizontal Strips) को **पंक्ति** (Row) और **ऊर्ध्वाधर पट्टियों** (Vertical Strips) को **स्तंभ** (Column) कहेंगे। प्रति इकाई परिवहन खर्च C_{ij} को प्रत्येक कोष्ठिका के उत्तर पश्चिम के कोने पर लिखा जा सकता है जैसा कि सारणी T–I में दिखाया गया है। इस तरह, परिवहन समस्या के सभी आंकड़ों को सारणी रूप में रखा जा सकता है। यहां कोष्ठिकाओं के जो नंबर दिए गए हैं वे केवल इसलिए दिए गए हैं जिससे कि आपको समझने में कोई कठिनाई न हो। अतः आंकड़ों को निरूपित करने वाली सारणी (T–I) को नीचे दी गई सारणी-II के रूप में प्रस्तुत किया गया है

सारणी-II

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
	5	15	10	50
	10	8	20	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	जोड़ 105

जो बातें स्पष्ट हैं उनका उल्लेख यहां हमने नहीं किया है। परिवहन समस्या को हल करने में चरों x_{ij} और अन्य संबंधित राशियों के मानों के लिए इन कोष्ठिकाओं का प्रयोग किया जा सकता है।

इस संकल्पना को आप अच्छी तरह से समझ पाए हैं कि नहीं इसके लिए हमने एक प्रश्न E–2 के रूप (भाग 9.3) में समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत किया है जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$m = 3, \qquad n = 4.$$

इस तरह, तीन स्रोत और चार बाजार यहां 3 पंक्तियां और 4 स्तंभ हैं।

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	5	7	6	4	70
S_2	2	8	3	1	50
S_3	1	7	4	5	90
$b_j \rightarrow$	50	40	50	70	

यह एक 3×4 परिवहन समस्या है। इसमें 3 पंक्तियां और 4 स्तंभ हैं। C_{ij} को, जैसा कि E–2 में दिखाया गया है, उनकी कोष्ठिकाओं में लिखा गया है और a_i और b_j को, जैसा कि E–2 में दिया गया है, उपयुक्त स्थान पर दिखाया गया है।

उदाहरण 2 : एक परिवहन समस्या के निम्नलिखित आंकड़ों को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

$m = 3 \qquad n = 4$

$a_1 = 15 \qquad a_2 = 20 \qquad a_3 = 30$

$b_1 = 10 \qquad b_2 = 15 \qquad b_3 = 22 \qquad b_4 = 18$

$C_{11} = 5 \qquad C_{12} = 7 \qquad C_{13} = 2 \qquad C_{14} = 1$

$C_{21} = 2 \qquad C_{22} = 4 \qquad C_{23} = 3 \qquad C_{24} = 6$

$C_{31} = 1 \qquad C_{32} = 3 \qquad C_{33} = 7 \qquad C_{34} = 4$

हल : जांच कीजिए कि नीचे दी गई सारणी परिवहन समस्या का अपेक्षित सारणी रूप है या नहीं :

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	5	7	2	1	10
S_2	2	4	3	6	20
S_3	1	3	7	4	30
$b_j \rightarrow$	10	15	22	18	

प्रश्न 2 : निम्नलिखित परिवहन समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

$m = 4 \qquad n = 3$

$a_1 = 45 \qquad a_2 = 30 \qquad a_3 = 25 \qquad a_4 = 50$

$b_1 = 40 \qquad b_2 = 20 \qquad b_3 = 90$

$C_{11} = 4 \qquad C_{12} = 3 \qquad C_{13} = 2$

$C_{21} = 3 \qquad C_{22} = 7 \qquad C_{23} = 5$

$C_{31} = 7 \qquad C_{32} = 2 \qquad C_{33} = 9$

$C_{41} = 2 \qquad C_{42} = 6 \qquad C_{43} = 7$

9.5 परिवहन समस्या की विशिष्ट संरचना (Special Structure of the Transportation Problem)

यदि आप किसी परिवहन समस्या के गणितीय निदर्श को ध्यान से देखें तो आपको समस्या के कुछ विशिष्ट अभिलक्षण देखने को मिलेंगे। इन विशिष्ट संरचनाओं के बारे में पूरी

जानकारी प्राप्त करने के लिए हमें सिलाई मशीन वाली परिवहन समस्या से कोई बड़ी समस्या लेनी होगी। आइए हम भाग 9.4 की समस्या E–2 लें। इसका गणितीय निदर्श यह है :

$$Z = 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 7x_{31} + 2x_{32} + 9x_{33} + 2x_{41} + 6x_{42} + 7x_{43}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_{ij}$$

जबकि,

$$\begin{array}{llllr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & & = 45 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & & & = 30 \\
 & & x_{31} + x_{32} + x_{33} & & = 25 \\
 & & & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = 50 \\
x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & +x_{41} & = 40 \\
\quad +x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{32} & \quad +x_{42} & = 20 \\
\qquad +x_{13} & \qquad +x_{23} & \qquad +x_{33} & \qquad +x_{43} & = 90
\end{array}$$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43} \geq 0$

अर्थात् $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4,$ $j = 1, 2, 3$

पहले हम इस गणितीय निदर्श से संबंधित जानकारी प्राप्त करेंगे। इसके बाद इसका व्यापकीकरण करेंगे और फिर बताएंगे कि m स्रोतों और n गंतव्य स्थानों वाली परिवहन समस्या के गणितीय निदर्श से हमें क्या-क्या जानकारी प्राप्त होती है।

इस गणितीय निदर्श में हमें निम्नलिखित बातें देखने को मिलती हैं :

1) व्यवरोधों की कुल संख्या 7 अर्थात् 4 + 3 है, जहां 4, स्रोतों की संख्या है और 3, गंतव्य स्थानों की संख्या है। पहले चार व्यवरोधों को - जिनमें से प्रत्येक व्यवरोध स्रोत पर लगाए गए प्रत्येक उपलब्धता से उत्पन्न होते हैं - **स्रोत व्यवरोध** (Source Constraints) या **पंक्ति व्यवरोध** (Row Constraints) कहा जाता है और इन्हें सारणी की पंक्तियों से निरूपित किया जाता है। बाद के तीन व्यवरोधों को जो कि गंतव्य स्थान पर की गई प्रत्येक मांग से उत्पन्न होते हैं - **स्तंभ व्यवरोध** (Column Constraints) या **गंतव्य स्थान व्यवरोध** (Destination Constraints) कहा जाता है। इन व्यवरोधों को सारणी के स्तंभ से निरूपित किया जाता है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि 'm' स्रोतों और 'n' गंतव्य स्थानों वाली व्यापक परिवहन समस्या में कुल m + n व्यवरोध होते हैं और सारणी में m पंक्तियां और n स्तंभ होते हैं। यहां यह देखा जा सकता है कि 9.4 की समस्या E–2 में चरों की संख्या 4 × 3 = 12 हैं और व्यापक परिवहन समस्या में चरों की संख्या m × n होती है।

2) अब आप पृष्ठ 17 पर दी गई समस्या के **गणितीय संरूपण** (Mathematical Formulation) को ध्यान से देखिए। यहां आप यह देख सकते हैं कि (i) प्रत्येक चर ठीक-ठीक दो व्यवरोधों में होते हैं और (ii) प्रत्येक व्यवरोध में चरों के गुणांक 1 हैं (अर्थात् शेष चरों के गुणांक शून्य हैं)। उदाहरण के लिए चर x_{13} लीजिए। यह चर पहले स्रोत के व्यवरोधों और 7वें व्यवरोधों ((4 + 3)वें = 7वें) में होता है। पहले चार व्यवरोध स्रोत व्यवरोध हैं, क्योंकि m = 4 और अगले तीन व्यवरोध अर्थात् (4 + 1)वां, (4 + 2)वां और (4 + 3)वां व्यवरोध गंतव्य स्थान व्यवरोध हैं। अत: x_{13}, पहले स्रोत व्यवरोधों और तीसरे गंतव्य स्थान व्यवरोधों में होता है जो कि

$4 + 3 = 7$वां व्यवरोध होता है। अब आप अनुमान लगा सकते हैं कि चर x_{33} कहां-कहां पर हो सकता है? स्पष्ट है कि यह चर तीसरे स्रोत व्यवरोध में, जो कि तीसरा व्यवरोध है, और तीसरे गंतव्य स्थान व्यवरोध में, जो कि $4 + 3 = 7$वां व्यवरोध है, होता है। इसी प्रकार चर x_{21}, दूसरे स्रोत व्यवरोध में, जो कि दूसरा व्यवरोध है, और पहले गंतव्य स्थान व्यवरोध में जो कि $4 + 1 = 5$वां व्यवरोध है, होता है। अब हम इस परिणाम का व्यापकीकरण इस प्रकार कर सकते हैं :

यदि एक परिवहन समस्या में 'm' स्रोत और 'n' गंतव्य स्थान हों, तो इसमें कुल $m + n$ व्यवरोध होते हैं। पहले 'm' व्यवरोध स्रोत व्यवरोध होते हैं और अगले 'n' व्यवरोध अर्थात् $(m + 1)$वां, $(m + 2)$वां, ..., $(m + n)$वां व्यवरोध गंतव्य स्थान व्यवरोध होते हैं। चर x_{ij}, iवें स्रोत व्यवरोधों और jवें गंतव्य स्थान व्यवरोधों, जो कि $(m + j)$वां है, में होता है।

हम यहां भी यह देखते हैं कि प्रत्येक चर x_{ij} के गुणांक 1 होते हैं (उन चरों के गुणांक, जो कि व्यवरोध में नहीं है, शून्य होते हैं)।

3) ऊपर के प्रेक्षण-(2) की सहायता से हम किसी भी चर x_{ij} का **सक्रियता सदिश** (Activity Vector) लिख सकते हैं। व्यापक परिवहन समस्या में चर x_{ij} का सक्रियता सदिश एक $m + n$ सदिश होता है।

ऊपर दिए गए उदाहरण में चर x_{13} पहले व्यवरोध में, जिसका गुणांक 1 है और $4 + 3 =$ 7वें व्यवरोध में जिसका गुणांक 1 है, होता है और शेष व्यवरोधों में गुणांक शून्य होते हैं, होता है। इसका सक्रियता सदिश नीचे (a) में दिया गया है। इसी प्रकार व्यापक परिवहन समस्या में (b) से x_{33} का सक्रियता सदिश प्राप्त होता है। (c) से x_{21} का सक्रियता सदिश प्राप्त होता है और (d) से x_{ij} का सक्रियता सदिश प्राप्त होता है :

$$
\begin{array}{c}
m = 1\\ m = 2\\ m = 3\\ m = 4\\ \\ n = 1\\ n = 2\\ n = 3
\end{array}
\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\ \cdots\\0\\0\\1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\ \cdots\\0\\0\\1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\ \cdots\\1\\0\\0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0\\0\\ \vdots\\0\\1\\0\\0\\ \vdots\\0\\ \cdots\\0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \text{i वाँ स्थान}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{... रेखा के नीचे jवाँ स्थान या}\\ \text{ऊपर से i + j वाँ स्थान}\\ \\ \\
\end{array}
$$

(a) (b) (c) (d)

4) अब हम इस भाग के प्रारंभ में दी गई परिवहन समस्या से गुणांकों A का आव्यूह लिख सकते हैं। इसके लिए हम $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ के क्रम में सक्रियता सदिश लिखते हैं जिससे कि हमें 7×2 आव्यूह प्राप्त होता है। (यहां 7 व्यवरोधों की संख्या है और 12, चरों की संख्या है।) इस तरह, A यह होता है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इस संरचना को हम इस रूप में लिख सकते हैं :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \\ I_{3\times 3} & I_{3\times 3} & I_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{bmatrix}$$

जहां 1, तीन अवयवों वाला पंक्ति सदिश है जिसका प्रत्येक अवयव 1 है अर्थात् $1 = [1, 1, 1]$, $0 = [0, 0, 0]$ और $I_{3\times 3}$ कोटि 3 वाला एकांक आव्यूह (Unit Matrix) हैं।

व्यापक $m \times n$ परिवहन समस्या के संबंध में

1 एक n सदिश है जिसका प्रत्येक अवयव 1 है।

O एक n सदिश है जिसका प्रत्येक अवयव 0 है।

$I_{3\times 3}$ एक $m \times n$ एकांक आव्यूह है।

5) आप जानते हैं कि व्यापक रैखिक प्रोग्रामन समस्या में यदि गुणांक आव्यूह A, $m \times n$ हो और A की जाति (Rank) हो, तो समीकरण निकाय $A_x = b$ का आधारी सुसंगत हल (Basic Feasible Solution) के अधिक से अधिक m धन चर होते हैं और, यदि जाति $k < m$ हो, तो $m - k$ व्यवरोध अतिरिक्त हो जाते हैं। इससे यह पता चलता है कि हमें आव्यूह A की जाति की जानकारी अवश्य होनी चाहिए।

अब आप ऊपर दी गई परिवहन समस्या के लिए बनाए गए आव्यूह A को देखिए। यदि हम पहली चार स्रोत पंक्तियों में से प्रत्येक पंक्ति को +1 से गुणा करें और गंतव्य स्थान व्यवरोधों की संगत अंतिम तीन पंक्तियों में से प्रत्येक पंक्ति को −1 से गुणा करें और इन्हें जोड़ दें तो हमें शून्य प्राप्त होगा। इस तरह, यदि हम A की पंक्तियों को $R_1, R_2, \ldots, R_n$ से प्रकट करें, तो $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - (R_5 + R_6 + R_7) = 0$ जहां $R_1, R_2, \ldots, R_7$ आव्यूह A की पंक्तियों को प्रकट करता है और प्रत्येक एक पंक्ति सदिश है जिसमें 12

अवयव हैं। ऊपर के संबंध को देखने से यह पता चलता है कि A की पंक्तियां रैखिकत: आश्रित (Linearly Dependent) हैं। इसका यह अर्थ है कि A की जाति, 7 से कम है। हम यहां यह मान लेते हैं कि A की जाति 6 है। कैसे? इसके लिए हमें A का एक 6×6 **व्युत्क्रमणीय उप-आव्यूह** (Non–Singular Submatrix) प्राप्त करना होता है।

इस उप-आव्यूह D को प्राप्त करने के लिए हम A की अंतिम पंक्ति को छोड़ देते हैं और A की तीसरी, छठी, नवीं, बारहवीं पंक्ति और पहले और दूसरे स्तंभ को लेते हैं।

इससे हमें निम्नलिखित D प्राप्त होता है :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} & B \\ O & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

जहां $I_{4 \times 4}$, कोटि 4 वाला एक एकांक आव्यूह है, $I_{2 \times 2}$, कोटि 2 वाला एक एकांक आव्यूह है। O, कोटि 2×4 वाला एक शून्य आव्यूह है, और

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

स्पष्ट है कि $|D| = 1 \neq 0$

अत: A की जाति $6 = 7 - 1 = (4 + 3) - 1$ है। हम इस परिणाम का व्यापकीकरण करते हैं और यह कथन देते हैं कि किसी भी दी हुई $m \times n$ परिवहन समस्या के लिए A, एक $(m + n) \times mn$ आव्यूह है और इसकी जाति $(m + n) - 1$ है।

इससे हमें यह महत्त्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है कि परिवहन समस्या के आधारी सुसंगत हल में $(m + n) - 1$ चर होते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि परिवहन समस्या के आधारी सुसंगत हल के अधिक से अधिक $(m + n) - 1$ चर धनात्मक होते हैं, और, हम यह भी जानते हैं कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का **इष्टतम हल** (Optimal Solution) एक आधारी सुसंगत हल होता है। अत: 'm' स्रोत और 'n' गंतव्य स्थान वाली किसी परिवहन समस्या के इष्टतम हल के अधिक से अधिक $(m + n) - 1$ धन चर होते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि इष्टतम हल के संबंध में, स्रोतों और गंतव्य स्थानों के बीच के 'mn' मार्गों या कड़ियों में से अधिक से अधिक $(m + n) - 1$ मार्गों का प्रयोग परिवहन के लिए करना होता है। इस तथ्य को हम इस प्रकार स्पष्ट कर सकते हैं :

यदि 12 स्रोत और 9 गंतव्य स्थान हों तो $12 \times 9 = 108$ मार्ग और चर होते हैं। इनमें से केवल $(12 + 9) - 1 = 20$ चर धनात्मक (आधारी) होते हैं और अन्य 88 शून्य (या अनाधारी होते हैं)। अत: 108 संभव मार्गों में से हमें माल को ढोने के लिए केवल 20 मार्गों की आवश्यकता होती है।

उदाहरण 3 : उदाहरण 2 की परिवहन समस्या के आंकड़ों के लिए।

i) गुणांक आव्यूह A लिखिए।

ii) चरों x_{31}, x_{23}, x_{14} का सक्रियता सदिश लिखिए।

iii) आव्यूह A की जाति लिखिए।

iv) A का कोटि 6 × 6 वाला व्युत्क्रमणीय आव्यूह लिखिए।

हल :

(i) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iii) A की जाति = 6

iv) A को निम्न पंक्ति को हटाकर चौथी, आठवीं, बारहवीं, पंक्ति और पहले, दूसरे और तीसरे स्तंभ को लेकर आव्यूह A से D प्राप्त किया जाता है।

प्रश्न 3 : निम्नलिखित परिवहन समस्या को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

$$Z = (4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13}) + (3x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23}) + (7x_{31} + 2x_{32} + 9x_{33})$$

का अधिकतमीकरण कीजिए, जबकि

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 45$$

$$x_{21} + 3_{22} + x_{23} = 30$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 25$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 35$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3.$$

9.6 सारांश (Summary)

इस इकाई में आपको परिवहन समस्या (TP) नामक एक विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या से परिचित कराया गया है। यदि इस प्रकार की एक समस्या दी हुई हो तो आप इसका एक गणितीय निदर्श प्राप्त कर सकते हैं। आप इसे सारणी के रूप में भी प्रस्तुत कर सकते हैं। आप परिवहन समस्या के विशिष्ट लक्षण बता सकते हैं, किसी चर का सक्रियता सदिश लिख सकते हैं और गुणांक आव्यूह लिख सकते हैं। आप यह भी जानते हैं कि गुणांक आव्यूह की जाति $(m + n) - 1$ होती है जहां 'm' और 'n' वही हैं जिन्हें पहले बताया जा चुका है। अतः एक परिवहन समस्या के किसी भी आधारी सुसंगत हल में अधिक से अधिक $(m + n) - 1$ चर धनात्मक होंगे और यही बात इष्टतम हल (Optimal Solution) के साथ भी होती है।

9.7 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E 1) $Z = 5x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$

का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 70 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 50$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 50 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 40$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 90 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 50$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 70$$

$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4)$

E 2)

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4	3	2	45
S_2	3	7	5	30
S_3	7	2	9	25
S_4	2	6	7	50
$b_j \rightarrow$	40	20	90	

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4	3	2	45
S_2	3	7	5	30
S_3	7	2	9	25
$b_j \rightarrow$	40	25	35	

9.8 शब्दावली (Glossary)

असंतुलित समस्या	Unbalanced Problem
गंतव्य स्थान	Destination
गणितीय निदर्श	Mathematical Model
नियतन समस्या	Assignment Problem
पंक्ति	Row
परिवहन समस्या	Transportation Problem
व्यवरोध	Constraint
संतुलित समस्या	Balanced Problem
सक्रियता समस्या	Activity Vector
स्तंभ	Column
स्रोत	Source

इकाई 10 परिवहन समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल (An Initial Basic Feasible Solution of the Basic Transportation Problem)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

10.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 9 में आप **परिवहन समस्या** (TP) के बारे में एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में इसके संरूपण के बारे में और सारणी रूप में इसके निरूपण के बारे में पढ़ चुके हैं। इकाई 9 के भाग 9.5 में परिवहन समस्या के कुछ विशेष लक्षणों के बारे में भी आप पढ़ चुके हैं जिनके कारण इस समस्या की एक विशेष संरचना होती है। क्योंकि परिवहन समस्या एक विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या होती है, इसलिए इसे **एकधा विधि** (Simplex Method) से हल किया जा सकता है। आप यह भी जानते हैं कि प्रत्येक व्यवरोध में एक कृत्रिम चर जोड़कर और फिर चरण-1 की प्रक्रिया लागू करके इस समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त किया जा सकता है। इस इकाई में आप यह पढ़ेंगे कि समस्या की विशिष्ट संरचना पर विशेष ध्यान देकर इसका प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल को एक बेहतर विधि से प्राप्त किया जा सकता है। यहां हम परिवहन समस्या का **प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल** (Initial Basic Feasible Solution) प्राप्त करने की दो विधियों अर्थात् **उत्तर-पश्चिम कोना विधि** (North–West Corner Method) और **आव्यूह-न्यूनतम विधि** (Matrix–Minima Method) पर चर्चा करेंगे।

मान लीजिए आप एकधा विधि से परिवहन समस्या हल कर रहे हैं। यहां आप यह देख सकते हैं कि 'm' स्रोतों और 'n' गंतव्य स्थानों वाली किसी भी परिवहन समस्या में mn चरों वाले $m \times n$ व्यवरोध होते हैं और प्रत्येक व्यवरोध एक समीकरण होता है। अत: पहले चरण के अंतर्गत प्रत्येक व्यवरोध में एक कृत्रिम चर जोड़ना होता है जिससे कि $mn + (m + n)$ चर प्राप्त होते हैं। इसके बाद चरण-1 विधि लागू करना होता है जिससे कि समस्या का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त किया जा सके। इस तरह यह पाते हैं कि एक मध्यम दर्जे की समस्या का, जहां m और n बहुत बड़ी नहीं हों, प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए काफी **पुनरावृत्तियां** (Iterations) करनी होती है। इस इकाई में हम यह देखेंगे कि समस्या की संरचना की सहायता से कृत्रिम चरों को जोड़े बिना और चरण-1 को लागू किए बिना समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल हम सीधे लिख सकते हैं।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई में आप :

- परिवहन समस्या (TP) का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए उत्तर पश्चिम कोना विधि या आव्यूह न्यूनतम विधि लागू कर सकेंगे;
- अपभ्रष्ट हलों को पहचान सकेंगे।

10.2 उत्तर-पश्चिम कोना विधि (North-West Corner Method)

आइए यहां हम इकाई 9 में बतायी गई सिलाई मशीन वाली परिवहन समस्या लें। सारणी रूप में समस्या यह होती है :

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	5 40	15 10	10 x	50
S_2	10 x	8 20	20 35	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	

यहां आप यह देख सकते हैं कि इस विधि को लागू करते समय परिवहन खर्च C_{ij} को ध्यान में नहीं रखा जाता और इसके लिए हमें अपनी सामान्य बुद्धि पर ही निर्भर करना होता है।

इस विधि में सबसे पहले हम स्रोत S_1 और गंतव्य स्थान D_1 को जोड़ने वाली उत्तर-पश्चिम को कोने वाली कोष्ठिका (1, 1) लेते हैं। इस मार्ग में, S_1 पर 50 इकाइयां उपलब्ध होती हैं और D_1द्वारा 40 इकाइयों की मांग होती है। 50 और 40 के न्यूनतम को अर्थात् 40 को जिसे Min[50, 40] = 40 लिखा जाता है, स्रोत S_1 से बाजार D_1 भेजा जा सकता है। इस तरह हम $x_{11} = 40$ लेते हैं। इसे कोष्ठिक (1, 1) में लिखते हैं और उसे एक गोले से घेर देते हैं जैसा कि सारणी में दिखाया गया है कि 40, x_{11} के मान को निरूपित करना है।

अब, क्योंकि D_1 की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति हो जाती है, इसलिए स्रोत S_2 से किसी मशीन के भेजने की आवश्यकता नहीं होती। अत: $x_{21} = 0$ लेते हैं। और, क्योंकि यह एक **अनाधारी चर** (Non-Basic Variable) है, इसलिए हम इस सारणी में नहीं लिखते। हम कोष्ठिका (2, 1) में एक 'x' लिख सकते हैं। S_1 में अभी भी 50 – 40 = 10 इकाइयां उपलब्ध हैं। बाजार D_1 की मांग 30 है। Min[10, 30] = 10 अत: S_1 से D_2 को 10 इकाइयां भेजी जा सकती हैं। पहले की तरह, यहां भी हम $x_{12} = 10$ लेते हैं और उसे एक गोले से घेर देते हैं। अब S_1 पर कोई इकाई उपलब्ध नहीं होती है जबकि D_2 की अभी भी 30 – 10 = 20 और इकाइयों की मांग है। इन इकाइयों को केवल S_2 से ही भेजा जा सकता है (क्योंकि S_1 पर सभी इकाई समाप्त हो चुकी है)। अत: x_{22} = Min[55, 20] = 20 लीजिए और उसे एक गोले से घेर दीजिए। अब S_2 55 – 20 = 35 इकाइयां उपलब्ध हैं और D_3 को केवल 35 इकाइयों की ही आवश्यकता है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

उत्तर स्पष्ट है क्योंकि समस्या संतुलित समस्या है। अत: $x_{23} = 35$ लीजिए और इसे एक गोले से घेर दीजिए। इस तरह, आप यह देखते हैं कि $x_{11} = 40$, $x_{12} = 10$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 35$ वाली परिवहन समस्या का आधारी सुसंगत हल आप काफी आसानी से प्राप्त कर लेते हैं। $x_{11} = 40$, $x_{12} = 10$, $x_{21} = 20$ और $x_{23} = 35$ आधारी चर हैं। अन्य सभी चर अनाधारी और शून्य हैं जहां आपने 'x' लिखा है। आधारी चरों की संख्या की गिनती कीजिए। ये 4 हैं अर्थात् $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$. इकाई 9 में आपने जो पढ़ा है उसे आप सत्यापित करना चाहेंगे आधारी चरों की संख्या $(m + n) - 1 = (2 + 3) - 1 = 4$ है।

इस विधि की तकनीक को समझ लेने के बाद आइए हम एक 3 × 4 परिवहन समस्या लें जिसका सारणी रूप यह है :

सारणी-I

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	5 (50)	7 (20)	6 x	4 x	70
S_2	2 x	8 (20)	3 (30)	1 x	50
S_3	1 x	7 x	4 (20)	5 (70)	90
$b_j \rightarrow$	50	40	50	70	$\Sigma a_i = \Sigma b_j = 210$

यहां हम यह देखते हैं कि $\Sigma a_i = \Sigma b_j = 210$, अत: यह एक संतुलित परिवहन समस्या है।

उत्तर-पश्चिमी कोने की कोष्ठिका (1, 1) से प्रारंभ कीजिए

$\text{Min}[a_1, b_1] = \text{Min}[70, 50] = 50$

$x_{11} = 50$ लीजिए।

$x_{21} = x_{31} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

क्योंकि D_1 की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति हो जाती है, इसलिए S_2 या S_3 से वहां कुछ भेजने की आवश्यकता नहीं है।

S_1 उपलब्धता $= 70 - 50 = 20$

D_2 की मांग $= 40$

$\text{Min}[20, 40] = 20$

$x_{12} = 20$ लीजिए

$x_{13} = x_{14} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

क्योंकि S_1 पर पूरा माल समाप्त हो चुका है, इसलिए यह बाजारों D_3 और D_4 को एक भी इकाई नहीं भेज सकता। पर अभी भी D_2 को $40 - 20 = 20$ इकाइयों की मांग है जिसकी पूर्ति अगले स्रोत S_2 को करना है।

$\text{Min}[20, 50] = 20$

S_2, मांग की गई सभी 20 इकाइयों को भेज सकता है।

$x_{22} = 20$ लीजिए।

$x_{32} = 0$ लीजिए और 'X' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

क्योंकि D_2 की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति हो जाती है। आइए अब हम D_3 की मांग पर, जो कि 50 इकाइयों की है, विचार करें। S_2 पर $50 - 20 = 30$ इकाइयाँ बची हुई हैं।

$\text{Min}[30,50] = 30$

S_2, D_3 द्वारा मांग की गई 50 इकाइयों में से 30 इकाइयों को भेज सकता है।

$x_{23} = 30$ लीजिए।

$x_{24} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

D_3 की मांग $50 - 30 = 20$ और इकाइयों की है।

S_3 के पास 90 इकाइयां हैं।

$\text{Min}[90, 20] = 20$

$x_{33} = 20$ लीजिए।

D_3 की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति हो जाती है।

अब D_4 की मांग पर विचार कीजिए।

D_4 की मांग = 70 और S_4 की उपलब्धता = 90 − 20 = 70

ऐसा क्यों होता है?

$x_{34} = 70$ लीजिए और एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त कीजिए जिसमें आधारी चर के मान ये हों

$$x_{11} = 50, x_{12} = 20, x_{22} = 20, x_{23} = 30, x_{33} = 20, x_{34} = 70$$

ये संख्या में 6 हैं। आप यहां क्या प्राप्त करना चाहते हैं?

गिनती में यह $(m + n) - 1 = (3 + 4) - 1 = 6$ होनी चाहिए।

अब, अनाधारी चर $x_{13} = x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = 0$ हैं और इन्हें सारणी में 'x' चिह्न से दिखाया गया है।

ऊपर दिए गए दो उदाहरणों में आप यह देख सकते हैं कि गोले से घेरे गए आधारी चर बारी-बारी से क्षैतिज रेखाओं और उर्ध्वाधर रेखाओं या कोष्ठिकाओं में गतिमान होते हैं। ये ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज रेखाओं में भी गतिमान हो सकते हैं जबकि $\text{Min}[a_1, b_1]$, a_1 के बराबर हों। ऊपर की दो दो स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में यह b_1 था।

आप यहां यह भी देख सकते हैं कि हमने आधारी सुसंगत हल के केवल धन चरों के बारे में ही चर्चा की है। यदि आप समीकरण निकाय $A_x = b, x \geq 0$, के, जहां A एक $m \times n$ आव्यूह है और A की जाति = m, आधारी सुसंगत हल की परिभाषा को याद करें, तो आप जान जाएंगे कि :

1) धन चरों की संख्या अधिक से अधिक 'm' होती है।

2) 'm' चरों, जिन्हें आधारी चर कहा जाता है, से संबंधित स्तंभ रैखिकतः स्वतंत्र (Linearly Independent) होते हैं।

अभी हमें कथन (2) की सत्यता को स्थापित करना है। परिवहन समस्या के संबंध में हम यह कहेंगे कि आधारी चर रैखिकतः स्वतंत्र है या आधारी कोष्ठिकाएं (वे कोष्ठिकाएं जिनमें आधारी चरों को गोले से घेरा गया है) रैखिकतः स्वतंत्र स्थिति में हैं।

परिवहन समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने की आव्यूह-न्यूनतम विधि।

प्रश्न 1 : उत्तर-पश्चिम कोना विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का आधारी सुसंगत हल प्राप्त कीजिए।

(i)

	D_1	D_2	D_3	$a_i\downarrow$
S_1	6	3	4	10
S_2	2	1	7	50
S_3	1	4	2	20
$b_j \rightarrow$	40	10	30	

(ii)

	D_1	D_2	D_3	$a_i\downarrow$
S_1	8	9	5	25
S_2	4	5	3	35
S_3	1	6	7	15
S_4	9	2	12	30
$b_j \rightarrow$	30	40	35	

10.3 आव्यूह-न्यूनतम विधि (Matrix-Minima Method)

भाग 10.2 में आपने यह देखा है कि हमने आंकड़ा C_{ij} की ओर कोई ध्यान नहीं दिया है। अव हम उस विधि पर चर्चा करेंगे जिसमें सबसे पहले हम उस मार्ग को लेंगे जिस पर परिवहन खर्च कम होता है और इसके वाद हम उन मार्गों को लेते जाएंगे जिन पर परिवहन खर्च बढ़ता जाता है।

इसे समझने के लिए आइए हम भाग 10.2 में ली गई दो समस्याओं को फिर से लें। सिलाई मशीन वाली परिवहन समस्या यह है :

सारणी-II

	D_1	D_2	D_3	$a_i\downarrow$
S_1	5 (40)	15 x	10 (10)	10
S_2	10 x	8 (30)	20 (25)	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	

कोष्ठिकाओं के संग्रह को हम एक आव्यूह मान सकते हैं। इस तरह यह एक 2×3 आव्यूह है जिसमें दो पंक्तियां और तीन स्तंभ हैं।

सबसे कम परिवहन खर्च वाला मार्ग वह है जो स्रोत S_1 को बाजार D_1 से जोड़ता है, जहां प्रति इकाई खर्च 5 है अर्थात् $C_{11} = 5$.

S_1 पर उपलब्धता 50 है।

D_1 पर मांग 40 है।

$\text{Min}[50, 40] = 40$

इस तरह, S_1, D_1 द्वारा मांग की गई सभी 40 इकाइयों की पूर्ति कर सकता है।

$x_{11} = 40$ लीजिए और इसे गोले से घेर दीजिए।

$x_{21} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

अब हम 'x' चिह्न से रहित कोष्ठिकाओं में सबसे कम खर्च वाली कोष्ठिका का पता लगाएंगे। (क्रास किए गए मार्गों की कोई आवश्यकता नहीं होती)। यह मार्ग स्रोत S_2 को बाजार D_2 से जोड़ने वाला (2, 2) है जहां $C_{22} = 8$.

S_2 पर उपलब्धता = 55

D_2 पर मांग = 30

Min[55, 30] = 30

$x_{22} = 30$ लीजिए और इसे एक गोले से घेर दीजिए।

$x_{12} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगाइए। क्यों?

अब, क्रास न किए गए या अप्रयुक्त मार्गों में सबसे कम खर्च वाले मार्ग का पता लगाते हैं। यह (1, 3) हैं, जहां $C_{13} = 10$

S_1 पर उपलब्धता = 50 − 40 = 10

D_3 पर मांग = 35

Min[10, 35] = 10

$x_{23} = 10$ लीजिए और इसे एक गोले से घेर दीजिए। अगला सबसे कम खर्च और उपयुक्त मार्ग (2, 3) है जहां $C_{23} = 20$. S_2 पर उपलब्धता = S_2 पर मांग = 25. क्यों?

$x_{23} = 25$ लीजिए और इसे एक गोले से घेर दीजिए। इससे एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है, जहां $x_{11} = 40$, $x_{13} = 10$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 25$. अन्य चर अनाधारी हैं।

ध्यान दीजिए कि आधारी चरों की संख्या (2 + 3) − 1 = 4 है। और यहां आप यह भी देख सकते हैं कि यह आधारी सुसंगत हल उस संगत हल से अलग है जिसे हमने भाग 10.2 में प्राप्त किया था। अंतर होने का कारण यह है कि यहां हमने परिवहन खर्च को भी ध्यान में रखा है।

फिर भी, अभी हमें इन आधारी चरों के रैखिक सवातंत्र्य (Linear Independence) को स्थापित करना है।

अब हम आव्यूह विधि से भाग 10.2 में बतायी गई दूसरी समस्या का आधारी सुसंगत हल प्राप्त करेंगे। समस्या यह है।

सारणी-III

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	5 x	7 (40)	6 (10)	5 (20)	70
S_2	2 x	8 x	9 x	6 (50)	50
S_3	1 (50)	7 x	9 (40)	5 x	90
$b_j \rightarrow$	50	40	50	70	

आव्यूह में न्यूनतम खर्च तीसरे स्रोत S_3 और गंतव्य स्थान D_1 को जोड़ने वाली कोष्ठिका (3, 1) में और स्रोत S_2 और गंतव्य स्थान D_4 को जोड़ने वाली कोष्ठिका (2, 4) में है। इन दो कोष्ठिकाओं में से किसी एक कोष्ठिका को हम ले सकते हैं। मान लीजिए हम कोष्ठिका (3, 1) लेते हैं :

$a_3 = 90, b_1 = 50$

$\text{Min}[90, 50] = 50$

$x_{31} = 50$ और एक आधारी चर के रूप में इसे एक गोले से घेर दीजिए।

क्योंकि D_1 की मांग की ठीक-ठीक पूर्ति हो जाती है, इसलिए हम कोष्ठिकाओं (1, 1) और (2, 1) में एक क्रास i लगा देते हैं जिससे यह पता चलता है ये अनाधारी हैं अर्थात् $x_{11} = x_{21} = 0$ और ये अनाधारी चर हैं।

अगला सबसे कम परिवहन खर्च वाला मार्ग (2, 4) है जहां $C_{24} = 1$.

$a_2 = 50, b_4 = 70$

$\text{Min}[50, 70] = 50$

$x_{24} = 50$ लीजिए और एक आधारी चर के रूप में इसे एक गोले से घेर दीजिए।

$x_{22} = x_{23} = 0$ लीजिए क्योंकि ये अनाधारी चर हैं। एक 'X' चिह्न लगाइए।

आइए अब हम खुले मार्गों अर्थात् उन मार्गों में से, जिन्हें क्रासित नहीं किया गया है, सबसे कम खर्च वाले मार्ग का पता लगाएंगे। ये हैं - (3, 3) और (1, 4) यहां हमें $C_{33} = 4$ और $C_{14} = 4$ प्राप्त होता है। इनमें से कोई एक लीजिए। मान लीजिए हम (3, 3) लेते हैं :

S_3 पर उपलब्ध क्षमता $90 - 50 = 40$ D_3 की मांग $= 40$

$\text{Min}[40, 50] = 50$

$x_{33} = 40$ लीजिए और एक आधारी चर के रूप में इसे एक गोले से घेर दीजिए।

$x_{23} = x_{34} = 0$ लीजिए और 'x' चिह्न लगा दीजिए। क्यों?

अब अगला सबसे कम खर्च वाला मार्ग (1, 4) लीजिए।

S_1 पर उपलब्धता $= 70$

D की मांग $= 70 - 50 = 20$

$\text{Min}[70, 20] = 20$

$x_{14} = 20$ लीजिए और एक आधारी चर के रूप में इसे एक गोले से घेर दीजिए।

आव्यूह में इससे ठीक अधिक खर्च वाला उपयुक्त मार्ग $C_{13} = 6$ है।

S_1 पर उपलब्धता $= 70 - 20 = 50$ D_3 पर मांग $= 50 - 40 = 10$

$\text{Min}[50, 10] = 10$

$x_{13} = 10$ लीजिए और एक आधारी चर के रूप में इसे एक गोले से घेर दीजिए।

अंतिम अप्रयुक्त मार्ग है (1, 2) जहां $C_{12} = 7$.

S_1 उपलब्धता = 70 − (20 + 10) = 40

D_2 पर मांग = 40

$x_{12} = 40$ लीजिए और इसे एक गोले से घेर दीजिए।

इससे आपको एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त हो जाता है जहां (4 + 3) − 1 = 6 आधारी चर हैं, अर्थात्

$x_{12} = 40,\quad x_{13} = 10,\quad x_{14} = 20$

$x_{24} = 50,\quad x_{31} = 50,\quad x_{33} = 40$

अन्य चर अनाधारी हैं।

यहां आप यह देख सकते हैं कि उत्तर-पश्चिम कोना विधि से प्राप्त किया गया समस्या का आधारी सुसंगत हल और आव्यूह-न्यूनतम विधि से प्राप्त हल अलग-अलग होते हैं। यहां आप यह भी देख सकते हैं कि यदि इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में हल करना होता तो प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए आपको कृत्रिम चरों को जोड़ना पड़ता और चरण-I विधि लागू करनी पड़ती। आप अनुमान लगा सकते हैं कि ऐसा न करके कितनी मेहनत करने से हम बच जाते हैं। यह भी एक कारण है कि बिल्कुल ही एक अलग इकाई में हम परिवहन समस्या पर चर्चा करते हैं।

प्रश्न 2 : आव्यूह-न्यूनतम विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए।

(i)

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	3	2	3	30
S_2	1	5	7	40
S_3	8	6	2	30
$b_j \rightarrow$	50	10	40	

(ii)

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	1	7	6	40
S_2	4	2	3	30
S_3	3	5	4	20
S_4	2	1	8	30
	45	40	35	

अभी तक हमने दी हुई परिवहन समस्या का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने की दो विधियों पर चर्चा की है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि अभी हमें यह सत्यापित करना है कि इस तरह प्राप्त हल एक आधारी सुसंगत हल होता है। अब हम यहां एक नियम या प्रक्रिया बताएंगें जिससे यह पता चलता है कि दिया हुआ सुसंगत हल आधारी है अर्थात् कोष्ठिकाएं रैखिकत: स्वतंत्र स्थितियों में हैं। इस **संवृत शृंखला नियम** (Closed Chain Rule) कहा जाता है।

संवृत शृंखला (Closed Chain)

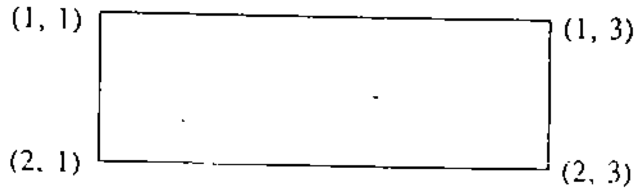
इस इकाई के प्रारंभ में बतायी गई 2×3 परिवहन समस्या लीजिए।

इसका सारणी निरूपण सारणी-II में दिया गया है, अर्थात्

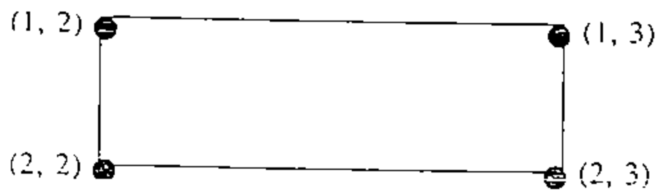
	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	5	15	10	50
S_2	10	8	20	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	

कोष्ठिका समुच्चय (1, 1), (1, 3), (2, 3) , (2, 1) लीजिए। कोई एक कोष्ठिका, मान लीजिए (1, 1), से प्रारंभ करके अन्य कोष्ठिकाओं तक पहुंचने के लिए बारी-बारी से क्षैतिज रेखा और अर्ध्वाधर रेखा खींचिए। यदि ऐसा करने के बाद हम प्रारंभिक कोष्ठिका पर लौट आते हों, तो हम कहते हैं कि एक संवृत शृंखला बन गई है।

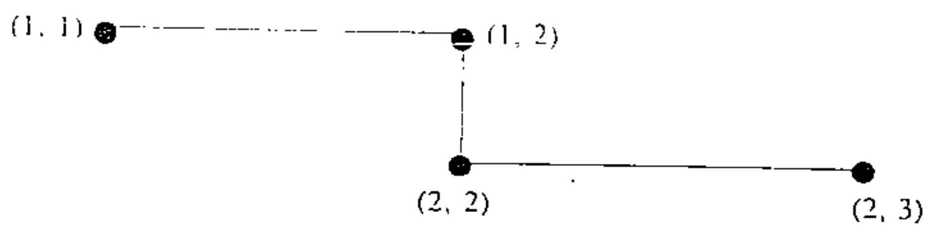
इस तरह, इस स्थिति में परिपथ यह होती है :



इसी प्रकार हम यह देखते हैं कि (1, 2), (1, 3), (2, 3). (2. 2), से एक संवृत शृंखला बनती है जैसा कि नीचे दिखाया गया है :



इसी प्रकार, (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1) से एक संवृत शृंखला बनती है। आइए अब हम निम्नलिखित कोष्ठिकाएं लें, (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)



इस स्थिति में बारी-बारी से क्षैतिज रेखा और अर्ध्वाधर रेखा खीचने पर भी हम प्रारंभिक कोष्ठिका (1, 1) पर नहीं पहुंचते। अतः, इन कोष्ठिकाओं से एक संवृत शृंखला नहीं बनती। इसलिए, इससे केवल एक सरल शृंखला ही बनती है।

इसी प्रकार (1, 1), (1, 3), (2, 3) से एक शृंखला बनती है।

(1, 1), (1, 3), (2, 2) से एक शृंखला बनती है।

अब हम एक विधि या नियम देंगे जिससे यह जांच की जा सकती है कि यदि कितनी भी कोष्ठिकाएं दी हुई हों, तो ये रैखिकतः स्वतंत्र स्थितियों में हैं या **रैखिक आश्रित स्थितियों** (Linear Dependent Positions) में।

संवृत शृंखला नियम (Closed Chain Method)

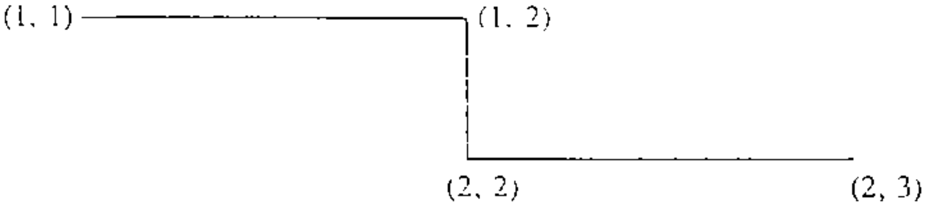
यदि एक सुसंगत हल दिया हुआ हो और आप एक-एक ऐसा संवृत परिपथ बना सकते हों जिसमें सभी आधारी कोष्ठिकाएं, आधारी कोष्ठिकाओं का कोई उप-समुच्चय या आधारी कोष्ठिकाओं का कोई भाग हो, तो ऐसी स्थिति में कोष्ठिकाएं रैखिकतः आश्रित स्थिति में होती है। यदि आप एक ऐसा परिपथ नहीं बना सकते हों जिसमें ऊपर बतायी गई आधारी कोष्ठिकाएं हों, तो कोष्ठिकाएं रैखिकतः स्वतंत्र स्थितियों में होती हैं।

इस नियम को लागू करके आप यह देख सकते हैं कि उत्तर-पश्चिम कोना विधि या आव्यूह-न्यूनतम विधि से प्राप्त प्रारंभिक सुसंगत हल वास्तव में एक आधारी सुसंगत हल होता है जो कोष्ठिकाओं की स्वतंत्र स्थितियों में होने के **निकष** (Criterion) को संतुष्ट करता है।

एक उदाहरण के रूप में, 2 × 3 परिवहन समस्या का हल यह है :

				$a_i \downarrow$
	5 (40)	15 (10)	10	50
	10	8 (20)	20 (35)	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	

आधारी कोष्ठिकाएं (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3) हैं



आप यहां यह देख सकते हैं कि इन कोष्ठिकाओं से एक संवृत शृंखला नहीं बनती। अतः ये कोष्ठिकाएं रैखिकतः स्वतंत्र स्थितियों में हैं।

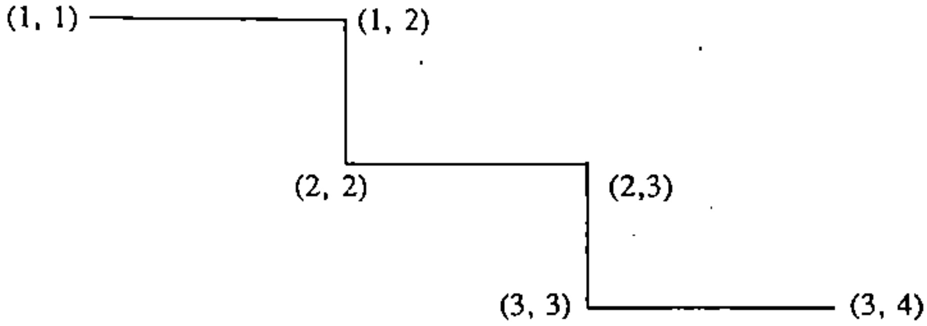
अब, भाग 10.2 में दी गई दूसरी परिवहन समस्या के लिए प्राप्त किया गया हल कीजिए।

नियतन 50 के साथ (1, 1), नियतन 20 के साथ (1, 2),

नियतन 20 के साथ (2, 2), नियतन 30 के साथ (2, 3),

नियतन 20 के साथ (3, 3), नियतन 70 के साथ (3, 4)

इन कोष्ठिकाओं से एक संवृत शृंखला नहीं बनती जैसा कि नीचे दिखाया गया है :



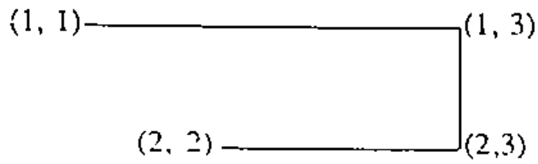
अत: ये कोष्ठिकाएं रैखिकत: स्वतंत्र स्थितियों में हैं।

अब आप भाग 10.3 के प्रारंभ में बनायी गई परिवहन समस्या के लिए प्राप्त किया गया हल ले सकते हैं :

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	5 (40)	15	10 (10)	50
S_2	10	8 (30)	20 (25)	55
$b_j \rightarrow$	40	30	35	

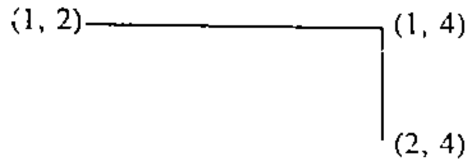
आधारी कोष्ठिकाएं (1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 2) हैं।

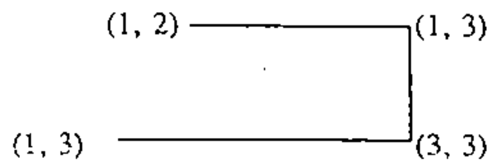
इनसे एक संवृत शृंखला नहीं बनती, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

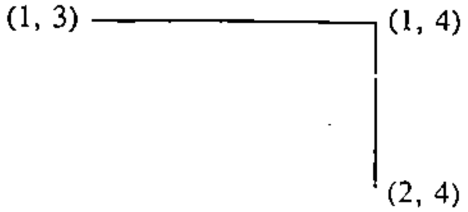


इसी प्रकार, आव्यूह-न्यूनतम विधि से प्राप्त दूसरी समस्या के हल में आधारी कोष्ठिकाएं (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 3) हैं।

हम ऐसी संवृत शृंखलाएं बनाने का प्रयास कर सकते हैं जिनमें सभी कोष्ठिकाएं हों। पर ऐसी संवृत शृंखला हम नहीं बना पाते जैसा कि नीचे दिखाया गया है :







अत: कोष्ठिकाएं रैखिकत: स्वतंत्र स्थितियों में हैं। इसलिए हल एक आधारी सुसंगत हल होगा।

हम अगले भाग में शून्य स्तर पर कोष्ठिकाओं को पहचानने के लिए भी इस नियम को लागू करेंगे, जबकि किसी भी विधि से प्राप्त हल या (अगली इकाई को पढ़ने के बाद) किसी भी चरण पर प्राप्त हल एक **अपभ्रष्ट हल** (Degenerate Solution) हो।

10.4 अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल (Degenerate Basic Feasible Solution)

आपको याद होगा कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के संबंध में आधारी सुसंगत हल उस स्थिति में अपभ्रष्ट होता है जबकि (एक या अधिक) आधारी चर शून्य स्तर पर हों अर्थात् समीकरण-निकाय $A_x = b$, $x \geq 0$ के लिए धन चरों की संख्या, m से कम होती है, क्योंकि आव्यूह A, $m \times n$ है और A की जाति m है। फिर भी, रैखिक प्रोग्रामन समस्या में आपको शून्य स्तर पर आधारी चर को पहचानने वाली समस्या का सामना नहीं करना पड़ता। रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने की प्रक्रिया में आपको शून्य स्तर पर में चर प्राप्त हो गए थे।

आइए हम यह देखे कि उत्तर-पश्चिम कोना विधि या आव्यूह-न्यूनतम विधि से आधारी सुसंगत हल प्राप्त करते समय **परिवहन समस्या** (TP) के साथ क्या घटना घटती है। कुछ स्थितियों में आप यह देख सकते हैं कि गोले से घेरे गए आधारी चरों की संख्या अपेक्षित संख्या $(m + n) - 1$ से कम होती है। इसे नीचे दिए गए उदाहरण से समझने की कोशिश करेंगे।

सारणी-II

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	5 (50)	15	10	50
S_2	10	8 (20)	20 (35)	55
$b_j \rightarrow$	50	20	35	

उत्तर-पश्चिम कोना विधि से प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त किया गया है। यहां आप यह देख सकते हैं कि एक अपभ्रष्ट हल प्राप्त करने के लिए सिलाई मशीन वाली परिवहन समस्या के आंकड़ों में थोड़ा परिवर्तन किया गया है। यहां आप क्या पाते हैं? आधारी चरों की संख्या 3 है जो कि $(3 + 2) - 1 = 4$ से कम है। रैखिक प्रोग्रामन समस्या में इस प्रकार के हल को आप अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल कहते हैं। अब हम शून्य स्तर पर

अतिरिक्त आधारी चर को पहचानेंगे जिससे कि इसे $(m + n - 1)$ चरों वाला एक पूर्ण सुसंगत हल बनाया जा सके। इसके लिए यहां हम एक नियम दे रहे हैं।

नियम (Rule)

शून्य स्तर पर आधारी चर के लिए एक प्रत्याशी के रूप में एक चर लीजिए।

इस प्रक्रम में यदि आप प्रत्याशी की कोष्ठिका पर लौट कर आ सकते हों, तो यह प्रक्रम अयोग्य साबित हो जाता है। क्यों? क्योंकि इनसे एक रैखिकत: आश्रित समुच्चय प्राप्त होता है। अन्यथा हम कोष्ठिका में एक शून्य रखकर उसे ◎ की तरह एक गोले से घेर सकते हैं।

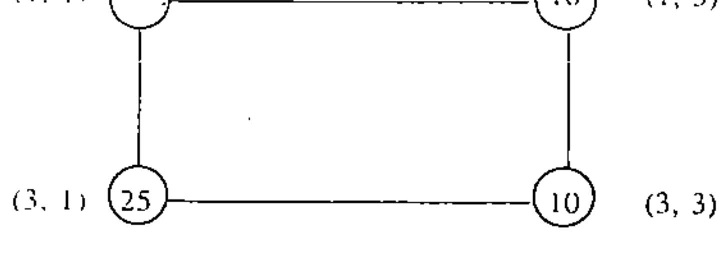
इस नियम को समझने के लिए एक क्षैतिज रेखा से (1, 2) को केवल (1, 1) से जोड़ा जा सकता है। और तब एक अर्ध्वाधर रेखा से (1, 1) को किसी आधारी कोष्ठिका से नहीं जोड़ा जा सकता। अत: हम (1, 2) पर लौट कर नहीं आ सकते। इस तरह, (1, 2) योग्य साबित होता है और हम कोष्ठिका (1, 2) में एक 0 रखकर उसे एक गोले से घेर सकते हैं। आप यहां यह देख सकते हैं कि (1, 3) और (2, 1) भी शून्य स्तर पर आधारी चर के लिए योग्य साबित होते हैं। याद रहे कि $(3 + 2) - 1 = 4$ आधारी चर बनाने के लिए केवल एक कोष्ठिका को ही लेना होता है।

इस संकल्पना को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक अन्य परिवहन समस्या लें :

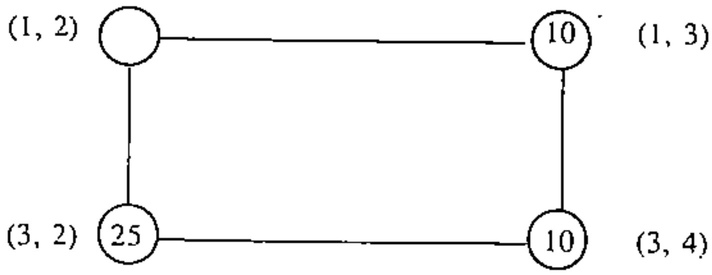
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$a_i \downarrow$
S_1	4	5	3 (10)	1 (10)	7	20
S_2	10	8	8	6	2 (20)	20
S_3	3 (15)	6 (25)	4 (10)	5	4	50
$b_j \rightarrow$	15	25	20	10	20	

ध्यान दीजिए कि आव्यूह-न्यूनतम विधि से आधारी सुसंगत हल को लिखा गया है। आवश्यक आधारी चरों की संख्या $(5 + 3) - 1 = 7$ है। प्रक्रम में हमें केवल 6 चर ही प्राप्त होते हैं। अत: शून्य स्तर पर एक अतिरिक्त आधारी चर को पहचानना होता है।

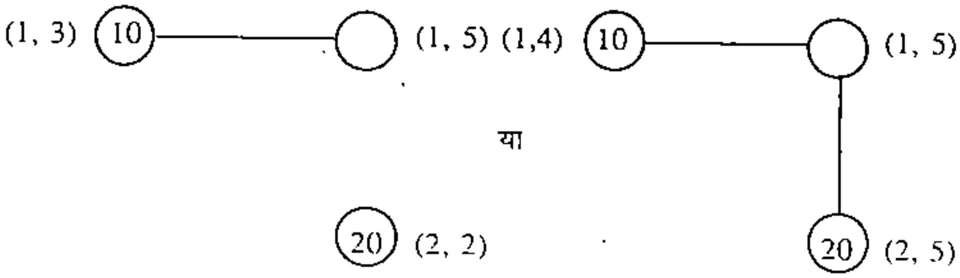
इस नियम के अनुसार हम यह पाते हैं कि (1, 1) योग्य साबित नहीं होता, क्योंकि हमें निम्नलिखित संवृत शृंखला प्राप्त है :



इस तरह, (1, 1) से एक संवृत शृंखला प्राप्त होती है, जहां आधारी कोष्ठिकाएं या चर (1, 3), (3, 3) और (3, 1) पर होते हैं।



यहां आप यह देख सकते हैं कि (1, 5) योग्य साबित होता है, क्योंकि इससे एक संवृत शृंखला नहीं बनती।



इसी प्रकार आप यह मालूम कर सकते हैं कि (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) और (3, 5) योग्य साबित होते हैं, पर (3, 4) योग्य साबित नहीं होता। अत: आप कोष्ठिकाओं (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) में से किसी भी कोष्ठिका में एक शून्य या ◎ रख सकते हैं, पर (1, 1), (1, 2) और (3, 4) में से किसी भी कोष्ठिका में आप शून्य या ◎ नहीं रख सकते।

स्मरण रहे कि कुल (5 + 3) − 1 = 7 आधारी चर या कोष्ठिका बनाने के लिए केवल एक को ही चुनना होता है।

प्रश्न 3 : उत्तर-पश्चिम कोना विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का आधारी सुसंगत हल प्राप्त कीजिए और शून्य स्तर पर आधारी चर भी मालूम कीजिए।

2	3	5	50
1	4	7	30
3	2	6	20
40	40	20	

प्रश्न 4 : आव्यूह न्यूनतम विधि से आधारी सुसंगत हल प्राप्त कीजिए और शून्य स्तर पर आधारी चर मालूम कीजिए।

2	4	8	14	80
7	6	1	10	50
9	5	7	3	40
30	60	50	30	

10.5 सारांश (Summary)

इस इकाई को पढ़ लेने पर इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि हालांकि परिवहन समस्या एक प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या ही होती है, पर कृत्रिम चरों को जोड़े बिना और चरण-I विधि को लागू किए बिना आप इस समस्या का प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल काफी आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। और, आप या तो उत्तर-पश्चिम कोना विधि से या आव्यूह-न्यूनतम विधि से भी आप आधारी सुसंगत हल आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। यदि आपको किसी चरण पर अपभ्रष्टता मिल जाती है, तब आप आधारी चर को पहचान सकते हैं जिसे शून्य के बराबर करना होता है, और इस तरह आप पूर्ण अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल लिख सकते हैं।

10.6 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E1)	i)	$x_{11} = 10$,	$x_{21} = 30$,	$x_{22} = 10$,
		$x_{23} = 10$,	$x_{33} = 20$	
	ii)	$x_{11} = 25$,	$x_{21} = 5$,	$x_{22} = 30$,
		$x_{32} = 10$,	$x_{33} = 5$,	$x_{43} = 30$
E2)	i)	$x_{22} = 10$,	$x_{21} = 40$,	$x_{11} = 10$,
		$x_{13} = 10$,	$x_{33} = 30$	
	ii)	$x_{42} = 30$,	$x_{11} = 40$,	$x_{22} = 10$,
		$x_{23} = 20$,	$x_{34} = 15$,	$x_{31} = 5$
E3)		$x_{11} = 40$,	$x_{12} = 10$,	$x_{22} = 30$,
		$x_{23} = 0$	$x_{33} = 20$	(शून्य स्तर पर अन्य आधारी चर भी हो सकते हैं, जैसे $x_{23} = 0$ या $x_{32} = 0$)
E4)		$x_{11} = 30$,	$x_{12} = 50$,	$x_{23} = 50$,
		$x_{24} = 0$,	$x_{32} = 10$,	$x_{34} = 30$

(शून्य स्तर पर अन्य आधारी चर भी हो सकते हैं, जैसे $x_{13} = 0$, $x_{33} = 0$)

10.7 शब्दावली (Glossary)

अपभ्रष्ट हल	Degenerate Solution
कोष्ठिका	Cell
रैखिकत: आश्रित	Linearly Dependent
रैखिकत: स्वतंत्र	Linearly Independent

इकाई 11 परिवहन समस्या की अभिकलनात्मक विधि (Computational Method for the Transportation Problem)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

इस खंड की पहली दो इकाइयों में आपको परिवहन समस्या से परिचित कराया गया है। वहां हमने इस समस्या का गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation) विकसित किया है और इसे सारणी रूप में प्रस्तुत किया है। वहां हमने यह भी देखा है कि परिवहन समस्या भी एक प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या होती है। उन इकाइयों में हमने परिवहन समस्या का एक **प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल** (Initial Basic Feasible Solution) प्राप्त करने की विधियों पर भी चर्चा की है।

इस इकाई में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किस प्रकार परिवहन समस्या के प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल से इसका **इष्टतम हल** (Optimal Solution) प्राप्त किया जाता है। रैखिक प्रोग्रामन समस्या की तरह यहां भी प्रत्येक चरण पर हमें एक आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है जिससे उद्देश्य फलन का जो मान प्राप्त होता है वह पिछले चरण में प्राप्त किए गए मान से या तो कम होता है या अधिक से अधिक इसके बराबर होता है। (स्मरण रहे कि यहां हम न्यूनतमीकरण समस्या पर बात कर रहे हैं)। कहने का अर्थ यह है कि हम एक आधारी सुसंगत हल से एक बेहतर आधारी सुसंगत हल की ओर चलते हैं और अंत में एक ऐसे हल पर पहुंचते हैं जिससे हमें न्यूनतम परिवहन खर्च प्राप्त होता है। इस संबंध में हमने संतुलित और असंतुलित दोनों ही परिवहन समस्या के लिए **अभिकलनात्मक विधि** (Computational Method) लागू की है। संतुलित परिवहन समस्या में लागू की गई विधि को 'U–V विधि' कहा जाता है।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- संतुलित परिवहन समस्या और असंतुलित परिवहन समस्या की पहचान सकेंगे;
- [illegible]
- [illegible]

11.2 संतुलित परिवहन समस्या (U-V विधि) (Balanced Transportation Problem U-V Method)

इस भाग में हम संतुलित परिवहन समस्या को हल करने की अभिकलनात्मक विधि पर चर्चा करेंगे। इस विधि को "Modi Method" भी कहा जाता है जिसकी व्युत्पत्ति "Modified Distribution Method" से हुई है। इस विधि को प्राय: 'U-V विधि' के नाम से जाना जाता है। इस विधि में **एकधा विधि** (Simplex Method) के चरणों को लागू करना होता है जैसा कि परिवहन समस्या के सारणी रूप के साथ किया गया है।

संतुलित परिवहन समस्या को हल करने के लिए अभिकलनात्मक विधि लागू करने से पहले आइए हम इकाई 9 और इकाई 10 में बताए गए इसके कुछ विशेष लक्षणों को फिर से याद कर लें।

i) m स्रोतों और n गंतव्य स्थानों वाली परिवहन समस्या यह होती है :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{w} C_{ij}\, x_{ij} \\ &\text{जबकि} \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots m. \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \quad j = 1, 2, \ldots n. \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n. \end{aligned}\right] \quad \text{(TP-I)}$$

जहां a_i , iवें स्रोत S_i पर उपलब्ध है; b_j. jवें गंतव्य स्थान D_j की मांग है; C_{ij}, एक इकाई को iवें स्रोत से jवें गंतव्य स्थान ले जाने का परिवहन खर्च है; और x_{ij}, iवें स्रोत से jवें गंतव्य स्थान को ले जायी गई इकाइयों की संख्या है।

ii) आव्यूह रूप में इस समस्या को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min } Z = CX. \\ &\text{जबकि} \\ &AX = b \\ &X \geq 0 \end{aligned}\right] \quad \text{(TP-I)}$$

जहां $C = (C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n}, C_{21}, \ldots, C_{2n}, C_{m1}, \ldots, C_{mn})$, $1 \times mn$ सदिश हैं।

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} mn \times 1 \text{ सदिश}, \; b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} (m+n) \times 1 \text{ सदिश और}$$

$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$, $(m + n) \times mn$ आव्यूह हैं।

$$\text{यहाँ } a_{ij} = e_i + e_{m+j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{iवाँ स्थान} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{jवाँ स्थान} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{iवाँ स्थान} \\ \\ \\ \\ \text{jवाँ स्थान} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

iii) परिवहन समस्या का सारणी रूप यह होता है :

सारणी 1

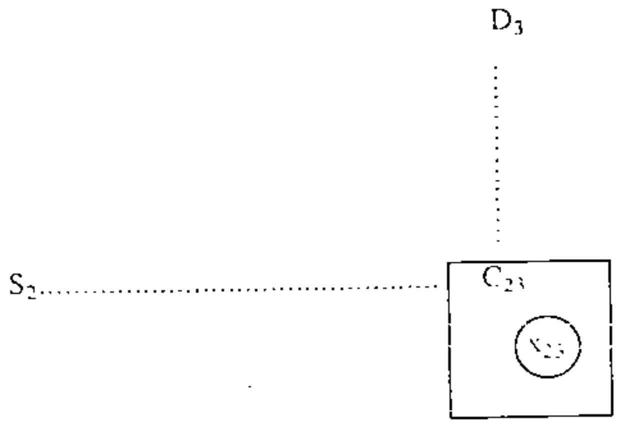
गंतव्य स्थान→ स्रोत ↓	D_1	D_2	.....	D_j	.....	D_n	उपलब्धता
S_1	C_{11}	C_{12}	.....	C_{1j}	.....	C_{1n}	a_1
S_2	C_{21}	C_{22}	.....	C_{2j}	.....	C_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_1	C_{11}	C_{12}	.....	C_{ij}	.....	C_{in}	a_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_m	C_{m1}	C_{m2}	.....	C_{mj}	.....	C_{mn}	a_m
मांग →	b_1	b_2	.....	b_j	.....	b_{nm}	

परिवहन समस्या के इस सारणी रूप में :

i) समस्या संतुलित होती है, यदि $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_i$

ii) प्रत्येक कोष्ठिका (i, j), TP–I के गुणांक आव्यूह A के स्तंभ a_{ij} को निरूपित करता है। अत: यह चर x_{ij} के संगत होता है।

iii) TP–I के आदारी सुसंगत हल में $(m + n - 1)$ आधारी चर हैं। सारणी-1 में इन चरों को गोले से घेर दिया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि x_{23} एक आधारी चर हो, तो हम कोष्ठिका (2, 3) को इस प्रकार लिखते हैं :

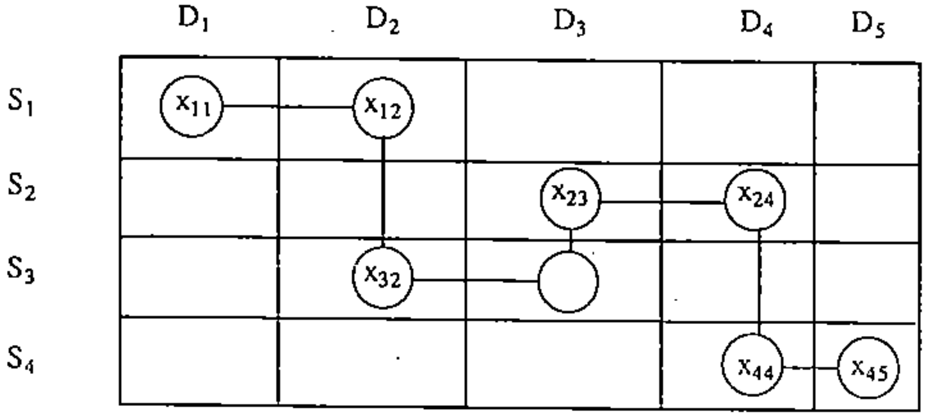


iv) अपभ्रष्ट (Non–Degenerate) आधारी सुसंगत हल में जब कभी $x_{ij} > 0$, तो हम कहते हैं कि कोष्ठिका (i, j) एक **अध्यासित कोष्ठिका** (Occupied Cell) या एक **आधारी कोष्ठिका** (Basic Cell) है। अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल वाली स्थिति में कुछ आधारी कोष्ठिकाओं के **शून्य नियतन** (Allocation) हो सकते हैं (अर्थात् इन

कोष्ठिकाओं $x_{ij} = 0$). फिर भी हम इन्हें अध्यासित कोष्ठिकाएं कहते हैं। इन कोष्ठिकाओं के शून्यों को गोले से घेर दिया जाता है।

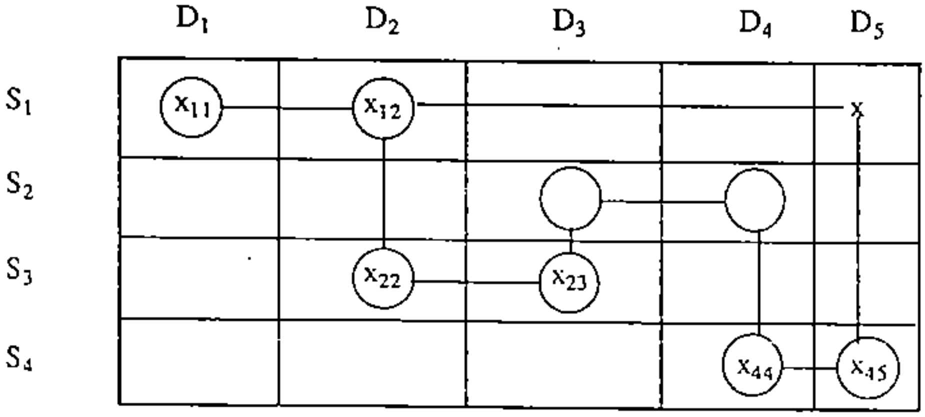
v) **अध्यासित कोष्ठिकाओं** (Occupied Cells) **के रैखिक स्वातंत्र्य** (Linear Independence) को संवृत शृंखला (परिपथ, पारा) की अनुपस्थिति से प्रदर्शित किया जाता है, जहां कोने अध्यासित कोष्ठिकाओं के रूप में होते हैं (सारणी-2 देखिए)।

सारणी 2



इस बात को, कि आनाधारी सदिश (कोष्ठिका) को आधारी सदिशों (कोष्ठिकाओं) के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। एक ऐसी संवृत शृंखला से प्रदर्शित किया जाता है जिसका प्रारंभ और समापन **अनाधारी कोष्ठिका** (Non–Basic Cell) पर होता है और इसके अन्य सभी कोने आधारी कोष्ठिकाओं पर होते हैं। सारणी-3 में इसी प्रकार की एक संवृत शृंखला की उपस्थिति दिखायी गई है जिसका प्रारंभन और समापन अनाधारी कोष्ठिका (1, 5) पर होता है।

सारणी 3



U-V विधि के अभिकलनात्मक चरण (Computational Steps of U-V Method)

इन सभी बातों की जानकारी परिवहन समस्या को हल करने की अभिकलनात्मक विधि (computational procedure) के विकास में उपयोगी सिद्ध होती है। U-V विधि के मुख्य चरण ये हैं:

I. द्वैत चरों का निर्धारण

II. नेट मूल्यांकनों (Evaluation) का निर्धारण

III. आधार में प्रविष्ट करने के लिए कोष्ठिका का चयन

IV. आधार से हटाने के लिए कोष्ठिका का चयन

V. आधार का अद्दतन और एक नए सुसंगत हल को ज्ञात करना, और

VI. समापन चरण को पहचानना

अब हम एक-एक चरणों को लेकर उन पर चर्चा करेंगे।

I. द्वैत चरों का निर्धारण (Determination of the Dual Variable)

2 स्रोतों और 3 गंतव्य स्थानों वाली परिवहन समस्या लीजिए जिसका सारणी रूप यह है :

सारणी 4

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4 2	3 2	1	4
S_2	2	6 1	2 5	6
$b_j \rightarrow$	2	3	5	

इस सारणी की प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ के साथ हम एक चर को संबंधित करते हैं जिन्हें हम **द्वैत चर** (Dual Variables) कहते हैं। पंक्तियों के साथ हम द्वैत चर u_i को संबंधित करते हैं और स्तंभों के साथ, u_j को संबंधित करते हैं। इस तरह, ऊपर के उदाहरण में द्वैत चर u_1 और u_2 दो पंक्तियों से क्रमश: संबंधित होते हैं और v_1, v_2, v_3 तीन स्तंभों से क्रमश: संबंधित होते हैं। यहां कुल 5 द्वैत चर हैं। इसका व्यपकीकरण करके हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि m स्रोतों और n गंतव्य स्थानों वाली समस्या के $(m + n)$ द्वैत चर होंगे।

इस समस्या का एक प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल सारणी-4 में दिया गया है।

मान लीजिए, $\Delta_{ij} = u_i + u_j - c_{ij}$, जहां $i = 1, \dots m$ और $j = 1, \dots n$.

इस तथ्य को ध्यान में रखकर द्वैत चरों को ज्ञात किया जाता है कि प्रत्येक आधारी कोष्ठिका (i, j) के लिए हमें यह अवश्य प्राप्त होगा :

$$\Delta_{ij} = u_i + u_j - c_{ij} = 0 \qquad (1)$$

क्योंकि $m \times n$ परिवहन समस्या में $(m + n - 1)$ आधारी कोष्ठिकाएँ होती हैं, इसलिए हमें (1) के प्रकार के $(m + n - 1)$ समीकरण प्राप्त होते हैं। इन $(m + n - 1)$ समीकरणों से $(m + n)$ द्वैत चर ज्ञात करने के लिए हम इन द्वैत चरों में से एक द्वैत चर को एक **स्वेच्छ मान** (Arbitrary Value) देते हैं। इसकी एक उत्तम परिपाटी यह है कि अधिकतम संख्या में आधारी कोष्ठिकाओं वाली पंक्ति या स्तंभ के संगत द्वैत चर को शून्य मान दे दिया जाए। तब शेष $(m + n - 1)$ द्वैत चर, $(m + n - 1)$ समीकरणों से आसानी से ज्ञात हो जाएंगे।

सारणी 4 में 4 आधारी कोष्ठिकाएं हैं। अत: (1) के प्रकार के 4 समीकरण होंगे। क्योंकि S द्वैत चरों का मान निकालता है। इसलिए इनमें से एक द्वैत चर को हम एक स्वेच्छ मान दे देते हैं। और, क्योंकि दो पंक्तियों में से प्रत्येक पंक्ति में और दूसरे स्तंभ में 2 आधारी कोष्ठिकाएँ हैं, इसलिए u_1, u_2 या v_2 में से किसी एक को हम एक स्वेच्छ मान दे सकते हैं। आइए हम मान लें कि $u_1 = 0$.4 समीकरणों में इसका प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$u_1 + v_1 = 4$$
$$u_1 + v_2 = 3$$
$$u_2 + v_2 = 6$$
$$u_2 + v_3 = 2$$

इन्हें हल करने पर हमें $u_2 = 3$, $v_1 = 4$, $v_2 = 3$ और $v_3 = -1$ प्राप्त होता है। इस तरह, सभी द्वैत चर ज्ञात हो जाते हैं।

यदि आधारी सुसंगत हल में (m + n – 1) से कम अध्यासित कोष्ठिकाएं हों, तो अध्यासित कोष्ठिकाओं की संख्या को (m + n – 1) करने के लिए जितनी अनध्यासित कोष्ठिकाओं (Unoccupied Cells) को चाहे उतने को हमें शून्य-प्रविष्टि (Zero–Entry) अध्यासित कोष्ठिका मान सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि एक 4 × 5 परिवहन समस्या के आधारी सुसंगत हल में 6 अध्यासित कोष्ठिकाएं हों, तो हम 2 अनध्यासित कोष्ठिकाओं को शून्य-प्रविष्टि अध्यासित कोष्ठिक. मानना होता है।

इस प्रकार की शून्य-प्रविष्टि कोष्ठिकाओं (Zero–Entry Cells) का चयन करते समय काफी सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है जिससे कि आधारी सुसंगत हल के सभी (m + n – 1) अध्यासित कोष्ठिकाएं (शून्य-प्रविष्टि या अन्यथा) रैखिकत: स्वतंत्र हों। इसके लिए यह आवश्यक है कि अध्यासित कोष्ठिकाओं से बनी कोई संवृंत शृंखला की उपस्थिति न हो।

II. नेट-मूल्यांकनों का निर्धारण (Determination of the Net–Evaluations)

हम प्रत्येक कोष्ठिका (i, j) के संगत एक राशि $\Delta_{ij} = u_i + u_j - c_{ij}$ को संबंधित करते हैं और इसे कोष्ठिका (i, j) का नेट मूल्यांकन कहते हैं। यहां यह देखा जा सकता है कि द्वैत चरों को ज्ञात करते समय हमने सभी आधारी कोष्ठिकाओं के नेट-मूल्यांकन को शून्य माना है। अत: अब हमें अनाधारी कोष्ठिकाओं के लिए Δ_{ij} ज्ञात करना है।

सारणी-4 द्वारा दिए गए उदाहरण में हम सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं का नेट- मूल्यांकन (Net–Evaluations) इस प्रकार ज्ञात करते हैं :

सारणी 5

	D_1	D_2	D_3	a_i ↓	u_i ↓
S_1	4 (2)	3 (2)	1	4	0
S_2	2	6 (1)	2 (5)	6	3
b_j →	2	3	5		
v_j →	4	3	−1		

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - C_{13} = 0 + (-1) - 1 = -2$$

और

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - C_{21} = 3 + 4 - 2 = 5$$

हम Δ_{ij} के मानों को कोष्ठिका (i, j) को दायीं ओर के नीचे के कोने में लिख देते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है

सारणी 6

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$	$u_i \downarrow$
	4 (2)	3 (2)	1 / -2	4	0
	2 /	6 (1)	2 (5)	6	3
$b_j \rightarrow$	2	3	5		
$v_j \rightarrow$	4	3	-1		

यहां यह देखा जा सकता है कि हम आधारी (अध्यासित) कोष्ठिकाओं के लिए Δ_{ij} को नही लिखते हैं, क्योंकि हम जानते हैं कि सभी (i, j) आधारी कोष्ठिकाओं के लिए $\Delta_{ij} = 0$.

III. आधार में प्रविष्ट करने के लिए कोष्ठिका का चयन (Selecting the Cell to Enter the Basis)

आधार में प्रविष्ट करने के लिए अनाधारी कोष्ठिका मालूम करने के लिए हम

$\text{Max} \{ \Delta_{ij} \mid \Delta_{ij} > 0 \} = \Delta_{rs}$, मान लीजिए ज्ञात करते हैं।

तब अनध्यासित कोष्ठिका (r, s) आधार में प्रविष्ट करता है, दूसरे शब्दों में, (r, s) एक अनाधारी कोष्ठिका होती है जिसमें अधिकांश धनात्मक Δ_{ij} प्रविष्टि (Entry) होती है। यदि अधिकतम एक से अधिक अनध्यासित कोष्ठिकाओं के लिए प्राप्त होता हो, तब हम इन कोष्ठिकाओं में से किसी एक को स्वेच्छया ले सकते हैं और उसे आधार में प्रविष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, क्योंकि सारणी-6 में केवल एक अनाधारी कोष्ठिका है अर्थात् (2, 1) जिसका धनात्मक नेट-मूल्यांकन $\Delta_{21} = 5$ है, इसलिए कोष्ठिका (2, 1) आधार में प्रविष्ट करती है।

IV. आधार से हटाने के लिए कोष्ठिका का चयन (Selecting the Cell to Leave the Basis)

पिछले चयन में हमने आधार में प्रविष्ट करने के लिए कोष्ठिका (r, s) का चयन किया था। आधार से हटाने के लिए कोष्ठिका का चयन करने में हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं :

क) (r, s) को प्रारंभ और समापन कोष्ठिका मानकर एक संवृत शृंखला ज्ञात कीजिए जिसके अन्य सभी कोने अध्यासित कोष्ठिकाओं पर हों।

ख) $x_{rs} = \theta$ लीजिए। ऊपर (क) में ज्ञात की गई संवृत शृंखला की कोने की कोष्ठिकाओं में x_{ij} से θ को बारी-बारी से घटाइए और जोड़िए। इसके लिए सबसे पहले संवृत शृंखला की कोष्ठिका (r, s) के संलग्न कोने की कोष्ठिका से θ घटाइए।

इस चरण की शुद्धता की जांच करने के लिए यह देखा जा सकता है कि θ को जोड़ते और घटाने के बाद भी, जैसा कि ऊपर बताया गया है, सारणी के पंक्ति-नियतनों का योगफल और स्तंभ-नियतनों (Column Allocations) योगफल विभिन्न स्रोतों और गंतव्य स्थानों की उपलब्धताएं और मांग के क्रमश: बराबर होते हैं।

ग) इन सभी कोष्ठिकाओं में से, जिनसे θ घटाया गया है, **न्यूनतम नियतन** (Minimum Allocation) वाली कोष्ठिका लीजिए। मान लीजिए चुनी गई कोष्ठिका (p, q) है, तब आधार से कोष्ठिका (p, q) घटती है।

सारणी-6 के उदाहरण से ही (क) के अनुसार प्राप्त की गई संवृत शृंखला नीचे दिखायी गयी है :

सारणी 6

	D_1	D_2	D_3
S_1	4 2 − θ	3 2 + θ	1 −2
S_2	2 5	6 1 − θ	2 5

प्रवेशी कोष्ठिका (2, 1) के नियतन को θ के बराबर लिया जाता है, अर्थात् $x_{21} = \theta$. तब संवृत शृंखला प्राप्त की जाती है और कोने की कोष्ठिकाओं में बारी-बारी से θ को घटाया और जोड़ा जाता है। इस तरह, कोष्ठिका (1, 1) के 2 से θ घटाया जाता है। कोष्ठिका (1, 2) के 2 में जोड़ा जाता है, कोष्ठिका (2, 2) के 1 से घटाया जाता है। क्योंकि कोष्ठिकाओं (1, 1) और (2, 2) से θ घटाया गया है और क्योंकि इनमें से कोष्ठिका (2, 2) की प्रविष्टि 1 न्यूनतम है, इसलिए हम कोष्ठिका (2, 2) का चयन आधार से हटाने के लिए करते हैं।

V. आधार का अद्यतन और नया आधारी सुसंगत हल ज्ञात करना (Updating the Basis and Determining the New Basic Feasible Solution)

तब θ के मान को सभी **अध्यासित कोष्ठिकाओं** (Occupied Cells) और **प्रवेशी कोष्ठिका** (r, s) में प्रतिस्थापित किया जाता है। यदि (p, q), आधार से हटने वाली कोष्ठिका हो, तो $x_{pq} = \theta$ रखने पर किसी भी कोष्ठिका का **नियतन** (Allocation) ऋणात्मक नहीं

होता। उस कोष्ठिका को या कोष्ठिकाओं में से किसी एक को जहां अद्यतन किए गए नियतन शून्य हो जाते हैं, नए आधारी सुसंगत हल की अनाधारी कोष्ठिका माना जाता है।

इस तरह हमें एक नया आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए, सारणी-7 में $x_{21} = 1 = \theta$ लेने पर θ के इस मान को सभी अध्यासित कोष्ठिकाओं और प्रवेशी कोष्ठिका (2, 1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अद्यतन किया गया निम्नलिखित आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है

सारणी 8

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4 (1)	3 (3)	1	4
S_2	2 (1)	6	2 (5)	6
$b_j \rightarrow$	2	3	5	

VI. इष्टतम चरण को पहचानना (Identification of the Optimal Stage)

इस प्रक्रम को जारी रखने पर हम प्रत्येक चरण पर एक आधार से दूसरे आधार पर आ जाते हैं। यदि किसी चरण पर हमें सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं के लिए $\Delta_{ij} \leq 0$ प्राप्त होता हो, तो हम कहते हैं कि हमें **इष्टतमता** (Optimality) प्राप्त हो गई है। अर्थात् वर्तमान आधारी सुसंगत हल **इष्टतम हल** (Optimal Solution) होता है, जिससे न्यूनतम परिवहन खर्च प्राप्त होता है।

वर्तमान उदाहरण में निम्नलिखित आधारी सुसंगत हल इष्टतम होता है, क्योंकि सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं के लिए $\Delta_{ij} \leq 0$.

सारणी 9

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$	$u_i \downarrow$
S_1	4 / −3	3 (3)	1 (1)	4	0
S_2	2 (2)	6 / −2	4 (4)	6	1
b_j	2	3	5		
u_j	1	3	1		

अत: $x_{12} = 3$, $x_{13} = 1$, $x_{21} = 2$, $x_{23} = 4$ इष्टतम आधारी सुसंगत हल है। न्यूनतम परिवहन खर्च यह होगा

$(3 \times 3) + (1 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 4) = 22$

उदाहरण 1 : न्यूनतमकारी परिवहन खर्च समस्या हल कीजिए।

सारणी–10

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$a_i\downarrow$
S_1	$C_{ij} = 10$	12	13	8	14	19	18
S_2	15	18	12	16	19	20	22
S_3	17	16	13	14	10	18	39
S_4	19	18	20	21	12	13	14
$b_j\rightarrow$	10	11	13	20	24	15	

पुनरावृत्ति 1

चरण 1 : उत्तर-पश्चिम कोना नियम से प्राप्त प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल यह होता है :

सारणी 11

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	a_i
S_1	10	8					18
S_2		3	13	6			22
S_3				14	24	1	39
S_4						14	14
$b_j\rightarrow$	10	11	13	20	24	15	

चरण 2 : u_i और v_j के मान ज्ञात करना :

क) क्योंकि अधिकतम संख्या वाली आधारी कोष्ठिकाएं दूसरी और तीसरी पंक्तियों में होती है, इसलिए या तो u_2 को या u_3 को शून्य के बराबर रखकर हम प्रारंभ कर सकते हैं। आइए हम यहां $u_2 = 0$ लेते हैं।

ख) क्योंकि (2, 2), (2, 3), (2, 4) इस पंक्ति की आधारी कोष्ठिकाएं हैं, और क्योंकि आधारी कोष्ठिकाओं के लिए हम यह जानते हैं कि $\Delta_{ij} = u_i + u_j - c_{ij}$, शून्य के बराबर होता है अर्थात् $u_i + v_j = c_{ij}$, इसलिए

$$u_2 + v_2 = 18 \Rightarrow v_2 = 18$$

$$u_2 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 12$$

$$u_2 + v_4 = 16 \Rightarrow v_4 = 16$$

ग) क्योंकि v_2 ज्ञात है, इसलिए हम दूसरे स्तंभ में आधारी कोष्ठिकाओं का पता लगाते हैं। क्योंकि इस स्तंभ में कोष्ठिका (1, 2) आधारी है, इसलिए

$u_1 + v_2 = C_{12} = 12$

$u_1 + 18 = 12 \Rightarrow u_1 = -6$

इसी प्रकार, क्योंकि v_3 और v_4 भी ज्ञात है, इसलिए आधारी कोष्ठिका (3, 4) से हमें यह प्राप्त होता है

$u_3 + v_4 = C_{34} \Rightarrow u_3 = -2$, क्योंकि $v_4 = 16$

घ) तीसरी पंक्ति में, कोष्ठिकाओं (3, 5) और (3, 6) से हमें यह प्राप्त होता है

$u_3 + v_5 = C_{35} = 10 \Rightarrow v_5 = 12, u_3 = -2$ लेने पर

और

$u_3 + v_6 = C_{36} = 18 \Rightarrow v_6 = 20, u_3 = -2$ लेने पर

ङ) अब कोष्ठिका (4, 6) के लिए

$u_4 + v_6 = C_{46} = 13 \Rightarrow v_4 = -7, v_6 = 20$ लेने पर

इस प्रकार सभी द्वैत चर ज्ञात हो जाते हैं।

सारणी–12

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$a_i \downarrow$	$u_i \downarrow$
S_1	10 (10)	12 (8)	13 $-\Delta_{13} = -7$	8 2	14 −8	19 −5	18	6
S_2	15 1	18 (3)	12 (13)	16 (6)	19 −7	20 0	22	0
S_3	17 −3	16 0	13 −3	14 (14)	10 (24)	18 (1)	39	−2
S_4	19 −10	18 −7	20 −15	21 −12	12 −7	13 (14)	14	−7
$b_j \rightarrow$	10	11	13	20	24	15		
$v_j \rightarrow$	16	18	12	16	12	20		

चरण 3 : नेट-मूल्यांकन ज्ञात करना।

सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं (i, j) के लिए

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$$

परिकलित कीजिए।

उदाहरण के लिए, कोष्ठिका (1, 3) से यह प्राप्त होता है

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - C_{13} = -6 + 12 - 13 = -7$$

और, कोष्ठिका (1, 4) से यह प्राप्त होता है

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - C_{14} = -6 + 16 - 8 = 2$$

इस प्रकार, सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं के लिए Δ_{ij} मूल्यांकित हो जाते हैं और प्रत्येक कोष्ठिका की दांयी ओर के तल पर लिख दिए जाते हैं, जैसा कि सारणी 12 में दिखाया गया है।

चरण 4 : उस कोष्ठिका को ज्ञात करना जिसे आधार में प्रविष्ट करना है।

Max $\{ \Delta_{ij} \mid \Delta_{ij} > 0\}$ ज्ञात कीजिए जो कि स्पष्टत: Δ_{14} हैं (सारणी 12 देखिए)। अत: आधार में कोष्ठिका (1, 4) प्रविष्ट करती है।

चरण 5 : उस कोष्ठिका को ज्ञात करना जिसे आधार से हटना है ।

कोष्ठिका (1, 4) को एक कोना मानकर एक संवृत शृंखला बनाइए जिसके अन्य सभी कोने आधारी कोष्ठिकाओं पर हैं। समुच्चय {(1, 4), (1, 2), (2, 2), (2, 4)} अपेक्षित संवृत शृंखला को परिभाषित करता है (सारणी-12 देखिए)। $x_{14} = \theta$, $x_{12} = \quad - \theta$, $x_{22} = 3 + \theta$, $x_{24} = 6 - \theta$ लीजिए। किसी आधारी चर को ऋणात्मक बनाए बिना θ का न्यूनतम मान 6 प्राप्त होता है। जब हम सारणी 12 में $\theta = 6$ लेते हैं, तो x_{24} शून्य हो जाता है। अर्थात् कोष्ठिका (2, 4), आधार को छोड़ देती है।

चरण 6 : सारणी 12 में $\theta = 6$ लेकर आधार का अद्यतन करने और (2, 4) को अनाधारी कोष्ठिका लेने पर हमें एक नया आधारी सुसंगत हल प्राप्त होता है, जैसा कि सारणी 13 में दिखाया गया है। इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि चरण-5 में $\theta = 6$ लेने पर आधारी चरों x_{24}, x_{12}, x_{22} और x_{24} में परिवर्तन हो जाता है और अन्य सभी आधारी चर अपरिवर्तित बने रहते हैं।

सारणी 13

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$a_i \downarrow$
S_1	10 10	12 2	13	8 6	14	19	18
S_2	15	18 9	12 13	16	19	20	22
S_3	17	16	13	14 14	10 24	18 1	39
S_4	19	18	20	21	12	13 14	14
$b_j \rightarrow$	10	11	13	20	24	15	

इस तरह एक पुनरावृत्ति पूरी हो जाती है और हमें एक उन्नत आधारी सुसंगत हल प्राप्त हो जाता है। अगली दो पुनरावृत्तियों को सारणी 14, सारणी 15 और सारणी 16 में दिखाया गया है।

सारणी 14

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$a_i \downarrow$	$u_i \downarrow$
S_1	10 10	12 2 − θ	13 −7	8 6 + θ	14 10	19 −7	18	−6
S_2	15 1	18 9	12 13	16 −2	19 −9	20 −2	22	0
S_3	17 −1	16 θ 2	13 −1	14 14 − θ	10 24	18 1	39	0
S_4	19 −8	18 −5	20 −13	21 −12	12 −7	13 14	14	−5
$b_j \rightarrow$	10	11	13	20	24	15		
$v_j \rightarrow$	16	18	12	14	10	18		

सारणी 15

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	a_i	u_i
S_1	10 10 − θ	12 −2	13 −9	8 8 + θ	14 −10	19 −7	18	−6
S_2	15 3	18 9 − θ	12 13	16 0	19 −7	20 0	12	2
S_3	17 −1	16 2 + θ	13 −3	14 12 − θ	10 24	18 1	39	0
S_4	19 −8	18 −7	20 −15	21 −12	12 −7	13 14	14	−5
$b_j \rightarrow$	10	11	13	20	24	15		
$v_j \rightarrow$	16	16	10	14	10	18		

सारणी 16

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	$a_i\downarrow$	$u_i\downarrow$
S_1	10 (1)	12	13	8 (17)	14	19	18	−6
S_2	15 (9)	18	12 (13)	16	19	20	22	−1
S_3	17	16 (11)	13	14 (3)	10 (24)	18 (1)	39	0
S_4	19	18	20	21	12	13 (14)	14	−5
$b_j\rightarrow$	10	11	13	20	24	15		
$v_j\rightarrow$	16	16	13	14	10	18		

इष्टतमता चरण (Optimality Shape): सारणी 16 में हम यह पाते हैं कि सभी अनाधारी कोष्ठिकाओं के लिए $\Delta_{ij} \leq 0$. इससे यह पता चलता है कि वर्तमान आधारी सुसंगत हल इष्टतम होता है। इष्टतम हल यह होता है

$x_{11} = 1, x_{14} = 17, x_{21} = 9, x_{23} = 13, x_{32} = 11, x_{34} = 3, x_{35} = 24, x_{36} = 1, x_{46} = 14$

और न्यूनतम परिवहन खर्च यह होता है

$$Z = (10 \times 1) + (8 \times 17) + (15 \times 9) + (12 \times 13) + (16 \times 11)$$
$$+ (14 \times 3) + (10 \times 24) + (18 \times 1) + (13 \times 14) = 1095$$

प्रश्न : क) परिवहन समस्या को हल कीजिए।

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i\downarrow$
S_1	4	3	6	5	20
S_2	7	10	5	6	30
S_3	8	9	12	7	50
$b_j\rightarrow$	15	35	20	30	

ख) नीचे परिवहन समस्या का एक सुसंगत हल दिया हुआ है :

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	2 (6)	3	11	7	6
S_2	1 (1)	0	6	1	1
S_3	5	8 (5)	15 (3)	9 (2)	
$b_j \rightarrow$	7	5	3	2	

i) क्या यह सुसंगत हल एक आधारी सुसंगत हल है?

ii) ऊपर की समस्या के आधारी सुसंगत हल की अध्यासित कोष्ठिकाओं (Occupied Cells) की न्यूनतम संख्या क्या होगी?

iii) एक शून्य-प्रविष्टि अध्यासित कोष्ठिका को उपयुक्त ढंग से प्रविष्ट कीजिए जिससे कि परिणामी हल एक आधारी सुसंगत हल हो। ऐसी दो और स्थितियां बताइए जहां इस प्रकार की शून्य प्रविष्टि कोष्ठिका को प्रविष्ट किया जा सकता हो।

iv) क्या दिया हुआ हल इष्टतम है? यदि नहीं, तो इसे ज्ञात कीजिए।

11.3 एक असंतुलित समस्या (An Unbalanced Problem)

अभी तक हमने यह मानकर परिवहन समस्या पर चर्चा की है कि सभी गंतव्य स्थानों की कुल मांग सभी स्रोतों की कुल उपलब्धता के बराबर होती है अर्थात् $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

उन परिवहन समस्याओं को जिनमें इस प्रकार की स्थिति नहीं होती है अर्थात् $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, असंतुलित परिवहन समस्याऐं (Unbalanced Transportation Problems) कहा जाता है। एक असंतुलित परिवहन समस्या के साथ दो संभावनाएं हो सकती हैं, या तो $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ या $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.
इन दोनों स्थितियों पर हम अलग-अलग चर्चा करेंगे।

स्थिति I : जब $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

यहां सभी स्रोतों की कुल उपलब्धता सभी गंतव्य स्थानों की कुल मांग से कम है। ऐसी स्थिति में हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं :

i) एक कृत्रिम स्रोत S_{m+1} लीजिए जिसकी उपलब्धता $a_{m+1} = \sum_{j=1} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

इससे हमें (m + 1) स्रोतों और n गंतव्य स्थानों वाली एक नई समस्या प्राप्त होती है और यह समस्या संतुलित होती है।

ii) इस कृत्रिम स्रोत S_{m+1} की संगत कोष्ठिकाओं में C_{ij} को शून्य के बराबर कर दीजिए, अर्थात्

$C_{m+1j} = 0$, जहाँ $j = 1, 2, \ldots n$

iii) इस तरह प्राप्त की गई संतुलित परिवहन समस्या को भाग 11.2 में बतायी गई 'U–V' विधि से हल कीजिए। चरों x_{m+1j} $(j = 1, 2, \ldots n)$ वाली इस संतुलित परिवहन समस्या के इष्टतम हल को हटा देने पर मूल असंतुलित समस्या का इष्टतम हल प्राप्त हो जाता है।

स्थिति II जब $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

यहां सभी स्रोतों की कुल उपलब्धता सभी गंतव्य स्थानों की कुल मांग से अधिक है। ऐसी स्थिति में हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं :

i) एक कृत्रिम गंतव्य स्थान D_{n+1} लीजिए जिसकी मांग $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

ऐसा करने से m स्रोत और (n + 1) गंतव्य स्थानों वाली एक नई समस्या प्राप्त होती है और यह समस्या संतुलित होती है।

ii) कृत्रिम गंतव्य स्थान D_{n+1} के संगत सभी कोष्ठिकाओं के C_{ij} को शून्य के बराबर कर दीजिए अर्थात्

$C_{i,n+1} = 0$, जहां $i = 1, 2, \ldots, n$

iii) इस तरह प्राप्त संतुलित परिवहन समस्या को भाग 11.2 में बतायी गई 'U–V' विधि से हल कीजिए। कृत्रिम गंतव्य स्थान D_{n+1} के संगत चरों $x_{i,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ वाली इस समस्या के इष्टतम हल को हटा देने पर दी हुई असंतुलित परिवहन समस्या का इष्टतम हल प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित परिवहन समस्या को हल कीजिए।

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	25	17	25	14	30
S_2	15	10	18	24	50
S_3	16	20	8	13	60
$b_j \rightarrow$	30	30	50	50	

हल : दी हुई परिवहन समस्या असंतुलित हैं, क्योंकि $\sum_{i=1}^{3} a_i \ (= 140) < \sum_{j=1}^{4} b_j \ (= 160)$

क्योंकि यहां कुल मांग कुल उपलब्धता से अधिक है, इसलिए हम एक कृत्रिम स्रोत S_u लेते हैं जिसकी उपलब्धता $a_4 = \sum_{i=1}^{3} b_j - \sum_{j=1}^{4} a_i = 20$. कृत्रिम स्रोत S_u के संगत सभी कोष्ठिकाओं के खर्च C_{ij} को शून्य मान लिया जाता है। इस तरह हमें निम्नलिखित संतुलित परिवहन समस्या प्राप्त होती है :

सारणी 17

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	25	17	25	14	30
S_2	15	10	18	24	50
S_3	16	20	8	13	60
S_4	0	0	0	0	20
$b_j \rightarrow$	30	30	50	50	

'U–V' विधि से इस संतुलित परिवहन समस्या को हल करने पर निम्नलिखित इष्टतम हल प्राप्त होता है:

सारणी 18

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	u_i
S_1	25 / −11	17 / −8	25 / −16	14 / (30)	30	14
S_2	15 / (20)	10 / (30)	18 / −8	24 / −9	50	15
S_3	16 / −3	20 / −12	8 / (50)	13 / (10)	60	13
S_4	0 / (10)	0 / −5	0 / −5	0 / (10)	20	0
$b_j \rightarrow$	30	30	50	50		
$v_j \rightarrow$	0	−5	−5	0		

इससे मूल असंतुलित परिवहन समस्या का निम्नलिखित इष्टतम हल प्राप्त होता है

$$x_{14} = 30,\ x_{21} = 20,\ x_{22} = 30,\ x_{33} = 50,\ x_{34} = 10$$

और न्यूनतम परिवहन खर्च यह होता है

$$Z = (14 \times 30) + (15 \times 20) + (10 \times 30) + (8 \times 50) + (13 \times 10) = 1550$$

यहां आप यह देख सकते हैं कि D_1 और D_2 दोनों में से प्रत्येक को अपनी मांग से 10 इकाई कम माल मिलता है।

उदाहरण 3 : निम्नलिखित परिवहन समस्या को हल कीजिए।

सारणी 19

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4	3	2	10
S_2	1	5	0	13
S_3	3	8	6	12
$b_j \rightarrow$	8	5	4	

हल : दी हुई परिवहन समस्या असंतुलित है, क्योंकि

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\ (= 35) > \sum_{j=1}^{3} b_j\ (= 77)$$

क्योंकि यहां कुल उपलब्धता कुल मांग से अधिक है इसलिए हम एक कृत्रिम गंतव्य स्थान D_4 लेते हैं जिसकी मांग यह है

इस कृत्रिम गंतव्य स्थान D_4 के संगत सभी कोष्ठिकाओं के खर्च C_{ij} को शून्य मान लिया गया है। ऐसा करने से हमें संतुलित परिवहन समस्या प्राप्त होती है :

सारणी 20

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$
S_1	4	3	2	0	10
S_2	1	5	0	0	13
S_3	3	8	6	0	12
$b_j \rightarrow$	8	5	4	18	

इस संतुलित परिवहन समस्या का इष्टतम हल यह होता है :

सारणी 21

	D_1	D_2	D_3	D_4	$a_i \downarrow$	$u_i \downarrow$
S_1	4 / −3	3 (5)	2 / −2	0 (5)	10	0
S_2	1 (8)	5 / −2	0 (4)	0 (1)	13	0
S_3	3 / −2	8 / −5	6 / −6	0 (12)	12	0
$b_j \rightarrow$	8	5	4	18		
$v_j \rightarrow$	1	3	0	0		

मूल असंतुलित परिवहन समस्या का इष्टतम हल यह होता है

$$x_{12} = 5,\ x_{21} = 8,\ x_{23} = 4$$

जहां न्यूनतम परिवहन खर्च यह होता है

$$Z = (3 \times 5) + (1 \times 8) + (0 \times 4) = 23$$

यहां आप यह देख सकते हैं कि स्रोत S_1 पर 5 इकाइयां, स्रोत S_2 पर 1 इकाई और स्रोत S_3 पर सभी 12 इकाइयां प्रयोग में नहीं लायी गई हैं।

प्रश्न 2 : निम्नलिखित असंतुलित समस्या को हल कीजिए।

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	4	3	2	10
S_2	1	5	0	13
S_3	3	8	6	12
$b_j \rightarrow$	8	5	4	

प्रश्न 3 : निम्नलिखित परिवहन समस्या को हल कीजिए।

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
S_1	7	9	2	20
S_2	4	5	7	15
$b_j \rightarrow$	10	30	2	

11.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में परिवहन समस्या को हल करने की 'U-V विधि' नामक एक अभिकलनात्मक विधि पर चर्चा की गई है। इकाई 9 और इकाई 10 में बताए गए परिवहन समस्या के कुछ विशेष लक्षणों को भाग 11.2 में फिर से याद कर लिया गया है। भाग 11.2 में संतुलित परिवहन समस्या के हल के लिए लागू की गई 'U–V विधि' के विभिन्न चरण भी बताए गए हैं। द्वैत चरों का निर्धारण, नेट-मूल्यांकनों का परिकलन, प्रवेशी और निर्गमी (Departing) कोष्ठिकाओं का चयन, आधारों का अद्यतन और एक नया आधारी सुसंगत हल – ये सभी सारणी रूप की परिवहन समस्या में किए गए हैं।

भाग 11.3 में असंतुलित परिवहन समस्या को हल करने की अभिकलनात्मक विधि पर चर्चा की गई है। जब कभी हमें असंतुलित परिवहन समस्या प्राप्त होती है, तो सबसे पहले एक कृत्रिम स्रोत या गंतव्य स्थान लेकर इस समस्या को संतुलित समस्या बनाया जाता है। कृत्रिम स्रोत या गंतव्य स्थान के कारण उत्पन्न हो गई कोष्ठिकाओं को हटाकर परिवर्तित संतुलित परिवहन समस्या के इष्टतम हल से असंतुलित समस्या का इष्टतम हल प्राप्त किया जा सकता है।

11.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E1) क) **इष्टतम आधारी सुसंगत हल यह है :**

$x_{12} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 15$, $x_{32} = 15$, $x_{34} = 20$

न्यूनतम परिवहन खर्च = 615

ख) i) नहीं

ii) $4 + 3 - 1 = 6$

iii) (3, 1) (2, 2)

iv) $x_{12} = 5$, $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 7$, $x_{33} = 1$, $x_{34} = 2$ से कोई इष्टतम हल प्राप्त नहीं होता और न्यूनतम परिवहन खर्च - 100

E2) असंतुलित परिवहन समस्या का इष्टतम हल यह है :

S_1 से D_2	5
S_2 से D_1	8
S_2 से D_3	4

न्यूनतम परिवहन खर्च = 23

E3) समस्या का इष्टतम हल यह है :

S_1 से D_3	20
S_2 से D_1	10
S_2 से D_2	5

न्यूनतम परिवहन खर्च = 105

11.6 शब्दावली (Glossary)

अध्यासित कोष्ठिका	Occupied Cell
आभिकलनात्मक	Computational
असंतुलित	Unbalanced
इष्टतमता	Optimality
इष्टतम हल	Optimal Solution
द्वैत चर	Dual Variable
पुनरावृत्ति	Iteration
संतुलित	Balanced
संवृत शृंखला	Closed Chain
स्वेच्छ मान	Arbitrary Value

इकाई 12 नियतन समस्या (The Assignment Problem)

ईकाई की रूपरेखा (Structure)

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

इस खंड की पहली तीन इकाइयों में हमने आपको परिवहन समस्या और इसे हल करने की अभिकलनात्मक विधि से परिचित कराया है। इस इकाई में हम **नियतन समस्या** (Assignment Problem) पर, जो कि परिवहन समस्या की एक विशिष्ट स्थिति है, चर्चा करेंगे। इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि परिवहन समस्या वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या है। इस इकाई में आप यह देखेंगे कि नियतन समस्या भी वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या है। उदाहरण के लिए, फैक्टरी मैनेजर तीन अलग-अलग जॉबों को तीन मशीनों में इस तरह बांट सकता है कि कम से कम कुल खर्च हो। 3 मशीनों को 3 जॉब 3! = 6 विधियों से दिया जा सकता है। फिर भी, 10 मशीनों को 10 जॉब 10! विधियों से दिया जा सकता है— पर ऐसा करना एक कठिन कार्य है। अत: नियतन समस्या को हल करने के लिए एक दस विधि को विकसित करना आवश्यक हो जाता है। इस स्थिति में भी, हालांकि **एकधा विधि** (Simplex Method) को लागू किया जा सकता है पर यह अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होती।

1931 में, हंगरी के गणितज्ञ डा. कोनिग ने ग्राफों पर एक प्रमेय प्रकाशित किया जिसे उसी वर्ष हंगरी के एक अन्य गणितज्ञ ई. इगरवेरी ने एक व्यापक रूप दे दिया। एच.डब्लू. कुन ने नियतन समस्या को हल करने के लिए इसी प्रमेय को लागू किया था। इस तरह विकसित इस विधि को 'हंगेरियन विधि' कहा जाता है। इस इकाई में हम नियतन समस्या को हल करने के लिए 'हंगेरियन विधि' पर चर्चा करेंगे।

12.2 नियतन समस्या का संरूपण (Formulation of an Assignment Problem)

आइए हम फैक्टरी वाली स्थिति यहां भी लें जहां तीन जॉब को तीन उपलब्ध मशीनों पर करना होता है। इनमें से प्रत्येक मशीन तीन जॉबों में से कोई भी जॉब कर सकता है। प्रत्येक जॉब को करने में मशीन खर्च उस मशीन पर निर्भर करता है जिसे यह जॉब करने के लिए दिया गया है। भिन्न-भिन्न जॉबों के लिए भिन्न-भिन्न मशीन पर होने वाले खर्च नीचे दिए गए हैं :

	मशीन I	मशीन II	मशीन III
जॉब I	3	4	2
जॉब II	1	3	7
जॉब III	2	5	4

कौन सा जॉब किस मशीन को दिया जाए जिससे कि सभी जॉब को पूरा करने में कम से कम खर्च आए। इस प्रकार की समस्या को **नियतन समस्या** (Assignment Problem) कहा जाता है।

प्रत्येक जॉब मशीन **संयोजन** (Combination) को जिसमें मशीनों के साथ सभी जॉब का संबंध **एक मशीन एक जॉब के आधार** (One-to-One Basis) पर होता है, **नियतन** (Assignment) कहा जाता है। प्रत्येक नियतन का संबंध **कुल खर्च** (Total Cost) से होता है। नियतन समस्या के अंतर्गत इस नियतन को ज्ञात करना होता है जिस पर कुल खर्च कम से कम हो। इस प्रकार के नियतन को हम **इष्टतम नियतन** (Optimal Assignment) कहेंगे।

ऊपर दिए गए उदाहरण में आइए हम सभी संभव नियतनों को लिखें। जॉब I तीन उपलब्ध मशीनों में से किसी एक मशीन को दिया जा सकता है। अत: इस कार्य को तीन विधियों से किया जा सकता है। अब, जॉब II उस मशीन को नहीं दिया जा सकता है जिसे पहले ही जॉब I दे दिया गया है। इसका कारण यह है कि एक मशीन को दो जॉब नहीं दिए जा सकते और विलोम रूप में यह कहा जा सकता है कि दो मशीनों को एक जॉब के साथ संबंधित नहीं किया जा सकता। अत: जॉब II को बाकी दो मशीनों में से किसी एक मशीन को दिया जा सकता है और इस कार्य को दो विधियों से किया जा सकता है। अंत में, जॉब III के लिए केवल एक ही मशीन बची रहती है - अत: इस कार्य को केवल एक विधि से ही किया जा सकता है। ऊपर बतायी गई बातों को एक साथ संयोजित करने पर हम यह पाते हैं कि एक मशीन को एक जॉब के आधार पर विभिन्न मशीनों को सभी जॉब $3 \times 2 \times 1$ विधियों से दिया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, संभव नियतनों की संख्या 3! है। नीचे की सारणी में इन सभी संभव नियतनों की गिनती की गई है और साथ ही प्रत्येक जॉब मशीन पर होने वाला 'कुल खर्च' भी दिया गया है।

क्रमांक	नियतन	कुल खर्च
1.	जॉब I - मशीन I जॉब II - मशीन II जॉब III - मशीन III	$3 + 3 + 4 = 10$
2.	जॉब I - मशीन I जॉब II - मशीन III जॉब III - मशीन II	$3 + 7 + 5 = 15$
3.	जॉब I - मशीन II जॉब II - मशीन III जॉब III - मशीन I	$4 + 7 + 2 = 13$
4.	जॉब I - मशीन II जॉब II - मशीन I जॉब III - मशीन III	$4 + 1 + 4 = 9$
5.	जॉब I - मशीन III जॉब II - मशीन I जॉब III - मशीन II	$2 + 1 + 5 = 8$
6.	जॉब I - मशीन III जॉब II - मशीन II जॉब III - मशीन I	$2 + 3 + 2 = 7$

इन सभी में सबसे कम खर्च अर्थात् 7. निम्नलिखित नियतन के संगत है :

जॉब I – मशीन III
जॉब II – मशीन II
जॉब III – मशीन I

इस नियतन को इष्टतम नियतन कहा जाता है।

आइए अब हम इसका व्यापकीकरण करें और n जॉब के लिए इसे एक सूत्र में बांधे। मान लीजिए n जॉब हैं जिन्हें पूरा करने के लिए एक जॉब एक मशीन के आधार पर n मशीनों को देना है। मान लीजिए एक मशीन द्वारा एक जॉब को करने में होने वाला खर्च ज्ञात है। तब न्यूनतम खर्च पर सभी जाबों को पूरा करने की समस्या को नियतन समस्या कहा जाता है। अब हम इस नियतन समस्या के लिए एक गणितीय सूत्र विकसित करेंगे।

मान लीजिए $J_1, J_2, ..., J_n$. n जॉब हैं और $M_1, M_2, ..., M_n$, n मशीन हैं। और यह भी मान लीजिए कि iवें जॉब J_i को jवीं मशीन M_j पर पूरा करने पर खर्च C_{ij} आता है। 'एक जॉब-एक मशीन के आधार पर' – का अर्थ यह है कि एक मशीन को एक से अधिक जॉब नहीं दिया जा सकता है और विलोम रूप में एक ही जॉब को एक से अधिक मशीने नहीं कर सकती।

आइए हम चर x_{ij} को इस प्रकार परिभाषित करें :

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ जबकि iवाँ जॉब jवीं मशीन को न दिया गया हो} \\ 1, \text{ जबकि iवाँ जॉब jवीं मशीन को दिया गया हो} \end{cases}$$

क्योंकि कोई भी जॉब ऐसा नहीं होता जिसे पूरा नहीं किया जाता हो और कोई भी मशीन ऐसी नहीं होती जो कि बेकार रहती हो। एक जॉब-एक मशीन की परिकल्पना से यह अर्थ निकलता है कि :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1. \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1. \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

इनमें से प्रत्येक संकलन (Summation) में बायीं ओर के केवल एक पद का चर x_{ij}, 1 के बराबर होता है और बाकी शून्य होते हैं। और, यह विशेष पद (जिसके लिए $x_{ij} = 1$) उस जॉब और उस मशीन से संबंधित होता है जिनका नियतन एक साथ किया गया है।

तब, नियतन समस्या को गणितीय रूप में इस प्रकार लिखा जाता है :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad\qquad (AP - 1)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ या } 1 \begin{pmatrix} i = 1, 2, ..., n \\ j = 1, 2, ..., n \end{pmatrix}$$

यहां यह देखा जा सकता है कि x_{ij} को ऋणेतर पूर्णांक मान (Non–Negative Integer Value) देने का अर्थ है x_{ij} को मान 0 या 1 देना। इसके लिए केवल समस्या (AP–I) के व्यवरोधों (Constraints) को देखना होता है। इससे इस बात की भी पुष्टि हो जाती है कि किस प्रकार x_{ij} को परिभाषित किया गया है।

नियतन समस्या नीचे दिए अपने खर्च-आव्यूह $[C_{ij}]$ से जानी जाती है :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

यदि प्रत्येक पंक्ति एक जॉब से संबंधित हो और प्रत्येक स्तंभ एक मशीन से संबंधित हो, तो C_{ij}, jवीं मशीन पर iवें जॉब को करने का खर्च होगा। स्पष्ट है कि $[C_{ij}]$ कोटि n वाला एक वर्ग आव्यूह (Square Matrix) है।

परिवहन समस्या की एक विशिष्ट स्थिति के रूप में नियतन समस्या

आइए हम $m \times n$ परिवहन समस्या लें :

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \\ \text{का न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \qquad x_{ij} \geq 0 \end{array}\right] \quad (\text{TP} - 1)$$

जहां

a_i = iवें स्रोत पर उपलब्धता

b_j = jवें गंतव्य स्थान की मांग

C_{ij} = iवें स्रोत से jवें गंतव्य स्थान तक ले जाने के लिए प्रति इकाई परिवहन खर्च

और x_{ij} = iवें स्रोत से jवें गंतव्य स्थान को भेजी गई इकाइयों की संख्या।

यहां हम एक सुपरिचित कथन दे रहे हैं कि यदि TP–I में a_i और b_j पूर्णांक हो, तो TP–I के प्रत्येक आधारी सुसंगत हल के पूर्णांक मान होते हैं।

नियतन समस्या को परिवहन समस्या की एक विशिष्ट स्थिति माना जा सकता है। इसके लिए यहां केवल इतना ही करना पड़ता है कि 'स्रोत' को 'जॉब' मान लें। और गतव्य स्थान को 'मशीन' मान लें। क्योंकि प्रत्येक $a_i = 1$ और प्रत्येक $b_j = 1$, इसलिए $\sum_{i=1}^{m} a_i = m$ और $\sum_{j=1}^{n} b_j = n$. परिवहन समस्या को हल करने के लिए हमें इसे संतुलित समस्या बनाना होता है, जबकि

यह पहले से संतुलित समस्या न हो। इसके लिए यह आवश्यक है कि m = n, अर्थात् जॉबों की संख्या मशीनों की संख्या के बराबर हो। और, यही बात हम नियतन समस्या में भी करते हैं - अर्थात् हम जॉबों की संख्या को मशीनों की संख्या के बराबर लेते हैं। इस तरह, हम यह पाते हैं कि नियतन समस्या परिवहन समस्या की ही एक विशिष्ट स्थिति है।

12.3 नियतन समस्या को हल करना (Solving an Assignment Problem)

क्योंकि नियतन समस्या परिवहन समस्या की एक विशिष्ट स्थिति होती है, इसलिए यह एक विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्या (Linear Programming Problem) होती है। अत: आप एकधा विधि (Simplex Method) से नियतन समस्या को हल कर सकते हैं। पर, नियतन समस्या की विशिष्ट संरचना को ध्यान में रखकर इसे हल करने के लिए एक अति सुविधाजनक विधि विकसित की गई है। इस विधि को हंगेरियन विधि कहा जाता है। इस विधि पर चर्चा करने से पहले आइए हम निम्नलिखित परिणामों पर विचार कर लें जिनसे इस विधि का विकास हुआ है।

प्रमेय 1

नियतन समस्या का इष्टतम हल अपरिवर्तित रहता है जबकि खर्च आव्यूह की किसी पंक्ति या स्तंभ में एक-एक अचर को जोड़ा या घटाया जाता है।

उपपत्ति

मान लीजिए $[C_{ij}]$ और $[C^*_{ij}]$, जहां $C^*_{ij} = C_{ij} \pm v_{ij} \pm v_j$, पंक्तियों और स्तंभों में अचर u_i और v_j को जोड़ने या घटाने के बाद प्राप्त मूल नियतन समस्या को क्रमश: निरूपित करते हैं। यहां u_i वह अचर है जिसे आव्यूह $[C_{ij}]$ की iवी पंक्ति के सभी अवयवों में जोड़ा या घटाया गया है, और v_j वह अचर है जिसे आव्यूह $[C_{ij}]$ के jवें स्तंभ के सभी अवयवों में जोड़ा या घटाया गया है। मान लीजिए $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$. खर्च आव्यूह $[C_{ij}]$ वाली मूल समस्या का उद्देश्य फलन है। आव्यूह खर्च $[C^*_{ij}]$ वाली परिणामी नियतन समस्या का उद्देश्य फलन Z^* यह होता है :

$$\begin{aligned}
Z^* &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{ij} \pm u_i \pm v_j\right) x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} \pm \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \pm \sum_{j=1}^{n} \left(v_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) \\
&= Z \pm \sum_{i=1}^{n} u_i \pm \sum_{j=1}^{n} v_j, \quad \because \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \\
&= Z \pm k \text{ जहाँ } \pm \sum_{i=1}^{n} u_i \pm \sum_{j=1}^{n} v_j = \pm k.
\end{aligned}$$

इसे देखने से यह पता चलता है कि मूल उद्देश्य फलन Z के न्यूनतमीकरण से वही हल प्राप्त होता है जो कि Z^* के न्यूनतमीकरण से प्राप्त होता है। अंतर केवल इष्टतम मानों में होता है।

ऊपर दिए गए प्रमेय को ध्यान में रखकर आइए हम निम्नलिखित नियतन समस्या लें :

	M_1	M_2
J_1	5	3
J_2	2	6

इस बात से सुनिश्चित होने के लिए कि खर्च आव्यूह का कोई भी अवयव ऋणात्मक न हो। प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम अवयव को उस पंक्ति के सभी अवयवों से घटाइएं ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

	M_1	M_2
J_1	2	0
J_2	0	4

ऊपर के समातीत (Reduced) खर्च-आव्यूह में इष्टतम नियतन, जिससे कुल खर्च शून्य होता है, J_1M_2, J_2M_1 होगा। अत: मूल समस्या का इष्टतम नियतन J_1M_2, J_2M_1 होगा जिससे इष्टतम मान $3 + 2 = 5$ प्राप्त होगा।

आइए अब हम दूसरी समस्या लें :

	M_1	M_2
J_1	5	3
J_2	6	2

पहले की तरह, प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम अवयव को उस पंक्ति के सभी अवयवों से घटाने पर निम्नलिखित आव्यूह प्राप्त होता है :

	M_1	M_2
J_1	2	0
J_2	4	0

अब, प्रत्येक स्तंभ के न्यूनतम अवयव का उस स्तंभ के सभी अवयवों से घटाने पर खर्च-आव्यूह यह हो जाता है

	M_1	M_2
J_1	0	0
J_2	2	0

एक जॉब-एक मशीन के आधार को ध्यान में रखने पर कुल शून्य खर्च वाला इष्टतम नियतन J_1M_2, J_2M_1 होगा। इस समस्या के मूल खर्च आव्यूह (Original Cost Matrix) से प्राप्त इष्टतम नियतन J_1M_1, J_2M_2, कुल खर्च $5 + 2 = 7$ के संगत होता है।

यह बात तभी तक होती है जब तक कि ऊपर दिए गए प्रमेय को लागू किया जाता है। कभी-कभी तो इस प्रमेय को लागू करने के बावजूद भी **समानीत खर्च आव्यूह** (Reduced Cost Matrix) के इष्टतम नियतनों का, जिनसे कुल शून्य खर्च प्राप्त होता है, पता नहीं लगाया जा सकता। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित समस्या लीजिए :

	M_1	M_2	M_3
J_1	2	4	2
J_2	5	2	3
J_3	4	2	5

प्रत्येक पंक्ति (स्तंभ) के न्यूनतम को उस पंक्ति (स्तंभ) के सभी अवयवों से घटाने पर निम्नलिखित समानीत आव्यूह प्राप्त होता है :

	M_1	M_2	M_3
J_1	0	2	0
J_2	3	0	1
J_3	2	0	3

यहां यह देखा जा सकता है कि एक जॉब-एक मशीन के आधार पर, इस समानीत आव्यूह से कुल शून्य खर्च उपलब्ध कराने वाला इष्टतम नियतन नहीं किया जा सकता। ऐसी स्थिति को यह देखकर कि ऊपर दिए गए समानीत आव्यूह के सभी शून्यों को केवल दो रेखाओं से ही आवृत (Covered) किया जा सकता है, व्यवस्थित ढंग से पहचाना जा सकता है। (यहां रेखाओं को **बिन्दुकित रेखाओं** (Dotted Lines) से दिखाया गया है)।

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots 0 \cdots & 2 \cdots & 0 \cdots \\ 3 & \vdots & \\ & 0 & 1 \\ & \vdots & \\ 2 & 0 & 3 \\ & \vdots & \end{array}$$

इन दो बिन्दुकित रेखाओं से आवृत नहीं हुए अवयवों से नए शून्य प्राप्त करके इस समस्या का समाधान किया जा सकता है। इसके लिए रेखाओं से आवृत नहीं हुए अवयवों में से न्यूनतम अवयव अर्थात् 1 को इस प्रकार के सभी अवयवों से घटाया जाता है। बिन्दुकित रेखाओं के प्रतिच्छेद पर के अवयवों में जोड़ा जाता है और बिन्दुकित रेखाओं के अंतर्गत आने वाले अन्य अवयवों को अपरिवर्तित रखा जाता है। ऐसा करने पर खर्च-आव्यूह इस रूप का हो जाता है।

	M_1	M_2	M_3
J_1	0	3	0
J_2	2	0	0
J_3	1	0	2

अब, कुल शून्य खर्च उत्पन्न करने वाले इष्टतम नियतन को J_1M_1, J_2M_2 के रूप में रखा जा सकता है जो कि कुल खर्च 2 + 3 + 2 = 7 के संगत होता है।

अब, यहां यह देखा जा सकता है कि समानीत खर्च आव्यूह में कुल शून्य खर्च उत्पन्न करने वाले इष्टतम नियतन हम केवल तभी कर सकते हैं जबकि सभी शून्यों को **आवृत** (Cover) करने के लिए आवश्यक बिन्दुकित क्षैतिज और अर्ध्वाधर रेखाओं की संख्या दी हुई नियतन समस्या की कोटि के बराबर होती हो। पहली दो समस्याओं में (जिनमें प्रत्येक कोटि 2 वाली है), इष्टतम नियतन हम केवल तभी कर सकते हैं जबकि सभी शून्यों को आवृत करने के लिए आवश्यक रेखाओं की न्यूनतम संख्या दो हो। तीसरी समस्या में (जोकि कोटि वाली है) इष्टतम नियतन केवल तभी किया जा सकता है जबकि समानीत आव्यूह में सभी शून्यों को आवृत करने के लिए आवश्यक रेखाओं की न्यूनतम संख्या तीन हो।

ऊपर बतायी गई सभी बातों से एक $n \times n$ नियतन समस्या को हल करने की हंगेरियन विधि के निम्नलिखित चरण प्राप्त होते हैं।

12.3.1 हंगेरियन विधि (Hungarian Method)

चरण 1 :

i) प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम अवयव को उस पंक्ति के सभी अवयवों से घटाइए।

ii) प्रत्येक स्तंभ के न्यूनतम अवयव को उस स्तंभ के सभी अवयवों से घटाइए।

इस तरह प्राप्त **समानीत आव्यूह** (Reduced Matrix) की प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ में कम से कम एक शून्य अवश्य होता है।

चरण 2 :

समानीत खर्च-आव्यूह के सभी शून्यों को न्यूनतम संख्या में ली गई क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं से आवृत (Cover) दीजिए। मान लीजिए सभी शून्यों को आवृत करने के लिए आवश्यक रेखाओं की न्यूनतम संख्या r है। यदि $r = n$ तो इस चरण पर एक इष्टतम नियतन किया जा सकता है। इस स्थिति में चरण 4 पर आ जाइए। यदि $r < n$, तो इस चरण पर एक इष्टतम नियतन नहीं किया जा सकता। इस स्थिति में चरण 3 पर आ जाइए।

चरण 3 :

यहां, सभी शून्यों को आवृत करने के लिए आवश्यक रेखाओं की न्यूनतम संख्या नियतन समस्या की कोटि से कम है।

उस न्यूनतम अवयव को लीजिए जो इन आवरण रेखाओं (Covering Lines) से आवृत न हुआ हो और

i) इसे सभी अनावृत अवयवों से घटाइए,

ii) दो आवरण रेखाओं के प्रतिच्छेद पर सभी अवयवों में इसे जोड़िए, और

iii) अन्य सभी आवृत अवयवों को अपरिवर्तित रहने दीजिए।

इस तरह हमें एक नया समानीत खर्च आव्यूह प्राप्त होता है। चरण 2 पर आ जाइए।

चरण 4 :

यहां सभी शून्यों को आवृत करने के लिए आवश्यक रेखाओं की न्यूनतम संख्या नियतन की कोटि के ठीक-ठीक बराबर है।

अब एक इष्टतम नियतन किया जाएगा।

i) एक-एक करके पंक्तियों की तबतक जांच करते जाइए जब तक कि ठीक-ठीक एक शून्य वाली पंक्ति प्राप्त नहीं हो जाती। इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

नीचे दी गई स्थितियों में से किसी भी एक स्थिति के होने पर ऊपर बताए गए चरणों को फिर से दोहराइए :

क) प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ में गोले से घेरा गया एक शून्य हो। इस स्थिति में एक इष्टतम नियतन किया जाता है और प्रक्रम समाप्त हो जाता है।

ख) कुछ पंक्तियों और कुछ स्तंभों में एक से अधिक शून्य हों जो गोले से घेरे न गए हों। ऐसी स्थिति में किसी भी एक शून्य को गोले से घेर दीजिए जो कि स्वेच्छया घेरे न गए हों और इसकी पंक्ति और स्तंभ दोनों के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

इस प्रकार प्रक्रिया को जारी रखने पर हमें प्रत्येक पंक्ति में घेरा हुआ ठीक-ठीक एक शून्य प्राप्त होगा।

प्रत्येक घेरे गए शून्य के संगत नियतन किए जाते हैं।

चरण 5

न्यूनतम खर्च प्राप्त करने के लिए दी हुई समस्या का मूल खर्च-आव्यूह लीजिए। सभी घेरे गए शून्य स्थितियों पर खर्च C_{ij} को जोड़कर इष्टतम खर्च प्राप्त किया जाता है।

ऊपर बतायी गई विधि को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : खर्च न्यूनतमकारी नियतन समस्या को हल कीजिए।

माध्यम पंक्ति↓	I	II	III	IV
A	10	12	9	11
B	5	10	7	8
C	12	14	13	11
D	8	15	11	9

चरण 1 :

i) प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम अवयव को उस पंक्ति के सभी अवयवों से घटाने पर हमें यह प्राप्त होता है :

	I	II	III	IV
A	1	3	0	2
B	0	5	2	3
C	1	3	2	0
D	0	7	3	1

ii) प्रत्येक स्तंभ के न्यूनतम अवयव को उस स्तंभ के सभी अवयवों से घटाने पर हमें यह प्राप्त होता है :

	I	II	III	IV
A	1	0	0	2
B	0	2	2	3
C	1	0	2	0
D	0	4	3	1

चरण 2 : न्यूनतम संख्या में ली गई क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं से सभी शून्य को आवृत कर दीजिए। इस संबंध में जो प्रक्रिया अपनायी जाती है वह है ऐसी पंक्ति या स्तंभ का पता लगाना ज़िसमें अधिकतम संख्या में शून्य हों। यहां आप यह देख सकते हैं कि हम केवल 3 रेखाओं से सभी शून्यों को आवृत कर सकते हैं। इसलिए $r = 3 < 4 = n$.

अतः चरण 3 पर आ जाइए।

	I	II	III	IV
A		0	0	2
B	0	2	2	3
C		0	2	0
D	0	4	3	1

चरण 3 : 1 न्यूनतम अनावृत अवयव है

i) 1 को सभी अनावृत अवयवों से घटाइए

ii) आवरण रेखाओं के प्रतिच्छेद पर के अवयवों अर्थात् स्थिति (1, 1) पर 1 और स्थिति (3, 1) पर 1 में 1 जोड़िए

iii) अन्य आवृत अवयवों को अपरिवर्तित रहने दीजिए। इस तरह प्राप्त समानीत खर्च-आव्यूह यह होता है :

	I	II	III	IV
A	2	0	0	2
B	0	1	1	2
C	2	0	2	0
D	0	3	2	0

फिर से न्यूनतम संख्या में ली गई क्षैतिज और अर्ध्वाधर रेखाओं से शून्यों को आवृत कीजिए। आप यहां यह देख सकते हैं कि सभी शून्यों को आवृत करने के लिए ठीक 4 रेखाओं की आवश्यकता होती है। क्योंकि $r = 4 = n$; इसलिए इस चरण पर इष्टतम नियतन किया जा सकता है। अत: चरण 4 पर आ जाइए।

	I	II	III	IV
A	2	0	0	2
B	0	1	1	2
C	2	0	2	0
D	0	3	2	0

चरण 4 : नियतन के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाइए :

	I	II	III	IV
A	2	~~0~~	0	2
B	0	1	1	2
C	2	0	1	~~0~~
D	~~0~~	3	2	0

i) दूसरी पंक्ति में केवल एक शून्य स्थिति (2, 1) पर है, अत: इस शून्य को गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् पहले स्तंभ के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

ii) अब चौथी पंक्ति में केवल एक शून्य स्थिति (4, 4) पर है, अत: इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् चौथे स्तंभ के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

iii) तीसरे स्तंभ में केवल एक शून्य स्थिति (3, 1) पर है। अत: इसे एक गोले से घेर दीजिए और इसकी पंक्ति अर्थात् पहली पंक्ति के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

iv) तीसरी पंक्ति में केवल एक शून्य है। अत: इसे एक गोले से घेर दीजिए।

यहां आप यह देख सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ घेरा गया एक शून्य है। इष्टतम नियतन यह होता है :

A–III, B–I, C–II, D–IV

चरण 5

मूल खर्च-आव्यूह से निम्नलिखित न्यूनतम नियतन खर्च प्राप्त होता है

$$C_{13} + C_{21} + C_{32} + C_{44} = 9 + 5 + 14 + 9 = 37$$

प्रश्न 1 : खर्च-न्यूनतमकारी नियतन समस्या हल कीजिए जहां खर्च-आव्यूह यह है :

मशीन

		I	II	III	IV	V
	A	11	10	18	5	9
जॉब	B	14	13	12	19	6
	C	5	3	4	2	4
	D	15	18	17	9	12
	E	10	11	19	6	14

उदाहरण 2 : खर्च न्यूनतमकारी नियतन समस्या हल कीजिए जिसका खर्च-आव्यूह नीचे दिया गया है :

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	2	5	7	9
J_2	4	9	10	1
J_3	7	3	5	8
J_4	8	2	4	9

हल

चरण 1 : i) प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम अवयव को इस पंक्ति के सभी अवयवों को घटाने पर निम्नलिखित समानीत खर्च-आव्यूह प्राप्त होता है :

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	3	5	7
J_2	3	8	9	0
J_3	4	0	2	5
J_4	6	0	2	7

ii) प्रत्येक स्तंभ के न्यूनतम अवयव को उस स्तंभ के सभी अवयवों से घटाने पर हमें यह प्राप्त होता है :

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	3	3	7
J_2	3	8	7	0
J_3	4	0	0	5
J_4	6	0	0	7

चरण 2 : न्यूनतम संख्या में ली गई क्षैतिज और अर्ध्वाधर रेखाओं से सभी शून्यों को आवृत कीजिए। सभी शून्यों को आवृत करने के लिए ठीक-ठीक 4 रेखाओं की आवश्यकता होती है। अत: $r = 4$

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	3	3	7
J_2	3	8	7	0
J_3	4	0	0	5
J_4	6	0	0	7

क्योंकि $r = 4 = n$. इसलिए हम सीधे चरण 4 पर आ सकते हैं और इष्टतम नियतन कर सकते हैं।

चरण 4 :

i) पहली पंक्ति में केवल एक शून्य स्थिति (1, 1) पर है। इसलिए इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् पहले स्तंभ के अन्य सभी शून्यों (यदि कोई हो) क्रास कर दीजिए।

ii) दूसरी पंक्ति में केवल एक शून्य स्थिति (2, 4) पर है। इसलिए इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् चौथे स्तंभ के अन्य शून्यों को (यदि कोई हो) क्रास कर दीजिए।

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	3	3	7
J_2	3	8	7	0
J_3	4	0	~~0~~	5
J_4	6	~~0~~	0	7

iii) अब आप यहां यह देख सकते हैं कि तीसरी और चौथी पंक्तियों में तथा दूसरे और तीसरे स्तंभों में प्रत्येक में दो शून्य हैं। इसे तोड़ने और एक नियत्तन करने के लिए हम किसी भी शून्य को स्वेच्छया ले सकते हैं। मान लीजिए हम स्थिति (3, 2) पर शून्य लेते हैं और इसे एक गोले से घेर देते हैं। अब इसकी पंक्ति अर्थात् तीसरी पंक्ति और इसके स्तंभ अर्थात् दूसरे स्तंभ के सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

iv) स्थिति (4, 3) पर केवल एक शून्य बचा रहता है। इष्टतम नियतन J_1M_1, J_2M_4, J_3M_2, J_4M_3 प्राप्त करने के लिए इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए।

v) J_1M_1, J_2M_2, J_3M_3, J_4M_2 एक वैकल्पिक इष्टतम नियतन हैं।

चरण 5 : न्यूनतम कुल खर्च मालूम करने के लिए इस समस्या का मूल खर्च-आव्यूह लीजिए और इसमें J_1M_1, J_2M_4, J_3M_3, J_4M_3 के संगत खर्च को जोड़ दीजिए। इससे निम्नलिखित न्यूनतम नियतन खर्च प्राप्त हो जाता है

$$2 + 1 + 3 + 4 = 10$$

यहां आप यह देख सकते हैं कि घेरे गए शून्य के लिए चरण (iii) के किसी स्वेच्छ चयन से भी समान न्यूनतम कुल खर्च प्राप्त होता है।

प्रश्न 2 : खर्च न्यूनतमकारी नियतन समस्या हल कीजिए।

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	8	3	7	6	2
B	3	7	9	3	1	6
C	5	3	7	5	6	3
D	8	4	8	7	2	2
E	6	7	8	6	9	4
F	5	7	7	5	5	7

उदाहरण 3 : मशीन के एक छोटे शॉप के मालिक के यहां 4 जॉब करने के लिए 4 मेकैनिक हैं। प्रत्येक मेकैनिक के प्रत्याशित लाभ को ध्यान में रखकर उन्हें इस प्राकार जॉब दिए गए हैं :

मेकैनिक

	I	II	III	IV
A	6	7	5	2
B	4	3	2	8
C	2	4	9	4
D	5	3	1	7

नियतन विधि से मेकैनिकों को जॉबों का इस तरह नियतन कीजिए जिससे कि अधिकतम लाभ हो।

हल : रैखिक प्रोग्रमन से हम यह जानते हैं कि खर्चों के स्थान पर उनकी ऋण राशियों को लेकर अधिकतमीकरण समस्या को न्यूनतमीकरण समस्या में बदला जा सकता है। हम यह भी जानते हैं कि नियतन समस्या को प्रोग्रामन समस्या में बदला जा सकता है। अत: खर्च के स्थान पर उनकी ऋण राशियों को लेकर हम ऊपर दी गई अधिकतमकारी नियतन समस्या को सामान्य न्यूनतमकारी नियतन समस्या में बदला जा सकता है और फिर हंगेरियन विधि लागू की जा सकती है। संगत न्यूनतमकारी नियतन समस्या का खर्च–आव्यूह नीचे दिया गया है :

	I	II	III	IV
A	−6	−7	−5	−2
B	−4	−3	−2	−8
C	−2	−4	−9	−4
D	−5	−3	−1	−7

चरण 1 : i) पहली पंक्ति के सभी अवयवों से न्यूनतम अवयव −7 घटाइए। इसी प्रकार, दूसरी, तीसरी और चौथी पंक्तियों के सभी अवयवों से क्रमश: −8, −9 और −7 घटाइए। समानीत आव्यूह (Reduced Matrix) यह होता है :

	I	II	III	IV
A	1	0	2	5
B	4	5	6	0
C	7	5	0	5
D	2	4	6	0

(ध्यान दीजिए कि इस चरण में (लाभ अधिकतमकारी नियतन समस्या के) मूल आव्यूह के प्रत्येक अवयव को उनकी पंक्तियों के संगत अधिकतम अवयव से क्रमश: घटाना होता है। दूसरे शब्दों में, पहली पंक्ति के अधिकतम अवयव अर्थात् 7 से पहली पंक्ति के सभी अवयवों को घटाइए। यही क्रिया अन्य पंक्तियों के साथ भी कीजिए।)

ii) प्रत्येक स्तंभ के न्यूनतम अवयव को उस स्तंभ के सभी अवयवों से घटाइए। इस तरह प्राप्त समानीत आव्यूह यह होता है :

	I	II	III	IV
A	0	0	2	5
B	3	5	6	0
C	6	5	0	5
D	1	4	6	0

चरण 2

न्यूनतम संख्या में ली गई क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं से सभी शून्यों को आवृत कीजिए। यहां आप यह देख सकते हैं कि केवल 3 रेखाएं ही सभी शून्यों को आवृत कर सकती हैं। अत: $r = 3$ क्योंकि $3 = r < n = 4$, इसलिए हम चरण 3 पर आ जाते हैं।

	I	II	III	IV
A	0	0	2	5
B	3	5	6	0
C	6	5	0	5
D	1	4	6	0

चरण 3 : क्योंकि न्यूनतम अनावृत अवयव 1 है, इसलिए

i) सभी अनावृत अवयवों से 1 घटाने पर

ii) क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं के प्रतिच्छेद पर के अवयवों अर्थात् स्थितियों (1, 4) और (3, 4) के अवयवों में 1 जोड़ने पर

iii) अन्य सभी आवृत अवयवों को अपरिवर्तित छोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है :

	I	II	III	IV
A	0	0	2	6
B	2	4	5	0
C	6	5	0	6
D	0	3	5	0

आप यहां यह देख सकते हैं कि सभी शून्यों को आवृत करने के लिए हमें ठीक-ठीक चार रेखाओं की आवश्यकता होती है अर्थात् अब $r = n$ इसलिए, हम चरण 4 पर जा सकते हैं और इष्टतम नियतन कर सकते हैं।

चरण 4

i) दूसरी पंक्ति में केवल एक शून्य, स्थिति (2, 4) पर है। इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् चौथे स्तंभ के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

ii) तीसरी पंक्ति में केवल एक शून्य, स्थिति (3, 3) पर है। इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् तीसरे स्तंभ के अन्य सभी शून्यों (यदि कोई हो) को क्रास कर दीजिए।

iii) अब, चौथी पंक्ति में केवल एक अचिह्नित शून्य (Unmarked Zero) स्थिति (4, 1) पर है। इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए और इसके स्तंभ अर्थात् पहले स्तंभ के अन्य सभी शून्यों को क्रास कर दीजिए।

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	0	2	6
B	2	4	5	0
C	6	5	0	6
D	0	3	5	$\cancel{0}$

iv) पहली पंक्ति में केवल एक शून्य स्थिति (1, 2) पर है। A II, B IV, CII, D I के रूप में इष्टतम नियतन प्राप्त करने के लिए इस शून्य को एक गोले से घेर दीजिए।

चरण 5

मूल लाभ अधिकतमकारी आव्यूह से इन नियतनों के संगत खर्चों को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित अधिकतम लाभ प्राप्त होता है

$$7 + 8 + 9 + 5 = 29$$

प्रश्न 6: 5 जॉब को 5 उपलब्ध मशीनों पर करना है। नीचे दिए गए आव्यूह में विभिन्न मशीनों को दिए गए विभिन्न जॉब से प्राप्त रूपयों में राशि को दिखाया गया है। वह नियतन ज्ञात कीजिए जो कि कुल प्राप्त राशि को अधिकतम कर दे।

	M1	M_2	M_3	M_4	M_5
J_1	5	11	10	12	4
J_2	2	4	6	3	5
J_3	3	12	5	11	6
J_4	6	14	4	11	7
J_5	7	9	8	12	5

12.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में नियतन समस्या पर अध्ययन किया गया है। यदि जॉब की संख्या और मशीन की संख्या समान हो तो इस समस्या के अंतर्गत इष्टतम नियतन प्राप्त करना होता है। यदि उद्देश्य कुल खर्च को न्यूनतम करना हो तो इस स्थिति में समस्या को खर्च न्यूनतमकारी नियतन समस्या या केवल नियतन समस्या कहा जाता है। भाग 12.1 में, वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों को लेकर नियतन समस्या को व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत किया गया है। भाग 12.2 में समस्या के गणितीय संरूप को विकसित किया गया है। यहां यह दिखाया गया है कि एक नियतन समस्या को उसके खर्च आव्यूह से पूरी तरह से निरूपित किया जाता है।

क्योंकि नियतन समस्या एक विशेष प्रकार की परिवहन समस्या और इस तरह एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या होती है, इसलिए इसे परिवहन तकनीक से या एकधा विधि से हल किया जा सकता है। क्योंकि नियतन समस्या की विशिष्ट संरचना होती है, इसलिए इसे हल करने के लिए हंगेरियन विधि नामक एक सरल विधि भाग 12.3 में विकसित की गई है।

कुछ उदाहरण लेकर हंगेरियन विधि को अच्छी तरह से समझने का प्रयास किया गया है। इस इकाई में नियतन समस्या से संबंधित ऐसे अनेक प्रश्न दिए गए हैं जिनमें उद्देश्य फलनों का अधिकतमीकरण करना होता है और ऐसी समस्याएं भी दी गई हैं जहां कुछ जॉब मशीन संबंध को निषेध माना गया है।

12.5 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E1) इष्टतम नियतन : A II, B V, C III, D IV, E I. न्यूनतम नियतन खर्च = 39

E2) इष्टतम नियतन : A III, B V, C II, D VI, E I, F IV या A III, B IV, C II, D IV, E VI, F I.

न्यूनतम नियतन खर्च = 20

E3) इष्टतम नियतन : J_1-M_3, J_2-M_5, J_3-M_4, J_4-M_2, J_5-M_1.

अधिकतम कुल प्राप्त राशि = 50.

समीक्षा (Review)

इस खंड में भी चार इकाइयां–इकाई-9, इकाई-10, इकाई-11 और इकाई-12 हैं। खंड 1 में रैखिक प्रोग्रामन से आपको परिचित कराया गया है और ग्राफीय विधि से केवल दो चरों वाली समस्या को हल करने के बारे में बताया गया है। खंड 2 में, एकधा कलन विधि नामक बीजीय विधि का प्रयोग अनेक चरों वाली समस्या को हल करने में किया गया।

इस खंड में आप कुछ विशेष प्रकार की रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं अर्थात् परिवहन समस्या और नियतन समस्या पर चर्चा की गई है। यह जानने के लिए आप स्वयं अपनी जांच कर सकते हैं कि आप इस खंड में बतायी गई बातों को अच्छी तरह से समझ पाए हैं कि नहीं। इसके लिए आप नीचे दी गई स्वय जांच समस्याओं को हल कर सकते हैं और खंड के अंत में दिए गए उत्तरों से आप अपने उत्तरों का मिलान कर सकते हैं।

P1) सारणी रूप में दी गई परिवहन समस्या का गणितीय निदर्श ज्ञात कीजिए।

	D_1	D_2	40↓
S_1	4	3	50
S_2	7	2	30
S_3	5	1	40
$b_j \rightarrow$	40	80	

P2) उत्तर-पश्चिम कोना विधि से [illegible]

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
S_1	1	6	3	1	7	40
S_2	5	2	1	4	2	70
S_3	6	1	3	9	5	20
$b_j \rightarrow$	25	35	15	25	30	

P3) आव्यूह न्यूनतम विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$a_i\downarrow$
S_1	40	50	30	10	70	20
S_2	100	80	75	65	20	20
S_3	30	60	45	50	40	50
$b_j\rightarrow$	15	25	20	10	20	

P4) एक कंपनी के तीन संयंत्र A, B, C पर स्थित हैं जो कि D, E, F, G और H में स्थित गोदामों को माल सप्लाई करते हैं। इन संयंत्रों की मासिक क्षमताएं क्रमश: 800, 500 और 900 इकाइयां हैं। गोदामों को हर मास क्रमश: 400, 400, 200, 400 और 800 इकाइयों की आवश्यकता होती है। प्रति इकाई परिवहन खर्च (रुपयों में) नीचे दिए गए हैं :

	D	E	F	G	H
A	5	8	6	6	3
B	4	7	7	6	6
C	8	4	6	6	3

कुल परिवहन खर्च को न्यूनतम करने के लिए कंपनी का इष्टतम विवरण ज्ञात कीजिए।

P5) एक कंपनी के पास 4 गोदाम और 5 स्टोर हैं। गोदामों में अतिरिक्त स्टोर की आवश्यकता और कीमत (रुपयों में)। माल को गोदाम i से स्टोर j तक ले जाने में परिवहन खर्च (रुपयों में) नीचे दिए गये हैं।

		स्टोर					अतिरिक्त ↓
		1	2	3	4	5	
	1	10	15	10	12	20	100
गोदाम	2	5	10	8	15	10	150
	3	15	10	12	12	10	120
	4	20	15	15	10	12	90
आवश्यकता		80	100	100	90	90	

P6) एक जंपिंग-शो प्रतियोगिता में 5 घोड़ों और 5 घुड़सवारों की टीम ने भाग लिया है। जब प्रत्येक घुड़सवार किसी भी घोड़े पर घुड़सवारी करता है तो उसे जो पेनाल्टी पाइंट मिलता है उसको प्रत्याशित संख्या नीचे दी गई है :

घुड़सवार

घोड़ा		R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
	H_1	5	3	4	7	1
	H_2	2	3	7	6	5
	H_3	4	1	5	2	4
	H_4	6	8	1	2	3
	H_5	4	2	5	7	1

किस तरह किस घुड़सवार को कौन सा घोड़ा दिया जाए कि टीम की कुल प्रत्याशित पेनाल्टी पाइंट को न्यूनतम किया जा सके।

P7) पांच आपरेटरों को पांच मशीनें देता है। नियतन खर्च नीचे दिए गए हैं :

मशीन

	I	II	III	IV	V
A	5	5	–	–	–
B	7	4	2	3	4
C	8	3	–	–	–
D	7	2	6	7	2
E	6	5	7	9	1

आपरेटर A मशीन III को नहीं चला सकता और आपरेटर C मशीन IV को नहीं चला सकता। एक ऐसी नियतन व्यवस्था ज्ञात कीजिए जो कि कुल खर्च को न्यूनतम कर देता हो।

समीक्षा/उत्तर/संकेत/हल (Review/Answers/Hints/Solutions)

P1) $Z = 4x_{11} + 3x_{12} + 7x_{21} + 2x_{22} + 5x_{31} + x_{32}$ का न्यूनतमीकरण कीजिए, जबकि

$x_{11} + x_{12} = 50$ $\qquad$ $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$

$x_{21} + x_{22} = 30$ $\qquad$ $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80$

$x_{31} + x_{32} = 40,$

$x_{ij} \geq 0$

P2) $x_{11} = 25$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 20$
$x_{23} = 15$, $x_{24} = 25$, $x_{25} = 10$
$x_{35} = 20$,

P3) $x_{14} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{25} = 20$
$x_{31} = 15$, $x_{32} = 25$, $x_{33} = 10$
$x_{35} = 0$, (या कोई अन्य आधारी चर जिससे एक संवृत शृंखला नहीं बनती है)

P4) कंपनी का इष्टतम वितरण यह है :

A से H	800
C से D	400
C से G	100
C से E	400
C से F	200
C से G	300

माल को किस तरह भेजा जाए जिससे कि परिवहन खर्च न्यूनतम हो? न्यूनतम परिवहन खर्च भी ज्ञात कीजिए।

P5)

गोदाम 1 से स्टोर 3 को	100 इकाई
गोदाम 2 से स्टोर 1 को	80 इकाई
गोदाम 2 से स्टोर 5 को	70 इकाई
गोदाम 5 से स्टोर 2 को	100 इकाई
गोदाम 3 से स्टोर 5 को	20 इकाई
गोदाम 4 से स्टोर 4 को	90 इकाई

न्यूनतम परिवहन खर्च = रू. 4,200/-

P6) इष्टतम नियतन : H_1-R_5, H_2-R_1, H_3-R_4, H_4-R_3, H_5-R_2 न्यूनतम पेनाल्टी पाइंट = 8.

P7) संकेत: जहां कोई नियतन न करना हो, तो सभी खर्च प्रविष्टियों को अनंत मान लीजिए। इस समस्या में $C_{13} = C_{34}$ लीजिए। तब हंगेरियन विधि से समस्या को हल कीजिए।

इष्टतम नियतन : A IV, B III, C V, D II, E I. न्यूनतम नियतन खर्च = 15.

(वैकल्पिक इष्टतम नियतन भी होता है।)

12.6 शब्दावली (Glossary)

अनावृत	Uncovered
आवृत	Covered
नियतन समस्या	Assignment Problem
समानीत आव्यूह	Reduced Matrix

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM - 12
रैखिक प्रोग्रामन

खंड

4

खेल सिद्धांत (Game Theory)

पूर्व दर्शन (Preview)

आज के जीवन में संघर्ष और स्पर्धा आम बात हो गई है। इनके अंतर्गत खेल, सैनिक युद्ध, चुनाव, विज्ञापन और बाजार स्पर्धा आदि आते हैं। इन स्थितियों में एक मूल बात यह होती है कि अंतिम परिणाम इस बात पर निर्भर करता है कि प्रतियोगी पार्टियों ने कौन-कौन सी युक्तियां अपनायी हैं। खेल सिद्धांत एक गणितीय सिद्धांत है जिसमें स्पर्धी स्थितियों के अभिलक्षणों के बारे में अध्ययन किया जाता है और संबंधित पार्टियों के निर्णयन प्रक्रम पर विशेष बल दिया जाता है। यूं तो विभिन्न प्रकार के खेल होते हैं, पर, इस पाठ्यक्रम में हम अपना अध्ययन **आव्यूह खेलों** (Matrix Games), तक सीमित रखेंगे। इन खेलों को **द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल** (Two-Person Zero-Sum Games) भी कहा जाता है। जैसा कि इन खेलों के नाम से पता चलता है, इन खेलों में केवल दो प्रतियोगी, विरोधी या खिलाड़ी होते हैं जो कि दो सेना, दो टीम, दो फर्म आदि के रूप में भी हो सकते हैं। शब्द शून्य-योग का अर्थ है कि एक खिलाड़ी जीतता है और दूसरा खिलाड़ी हारता है जिससे कि उनकी जीतों का कुल जोड़ शून्य होता है। फिर भी, इस खंड में बाद में हम द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल के व्यापक अर्थ की व्याख्या करेंगे। खेल सिद्धांत को **संक्रिया विज्ञान** (Operations Research) की एक महत्त्वपूर्ण शाखा माना जाता है क्योंकि वास्तविक जीवन से जुड़ी विभिन्न स्थितियों में इसका काफी अनुप्रयोग होता है।

यह खंड इस पाठ्यक्रम का अंतिम और चौथा खंड है। इसमें चार इकाइयां–इकाई-13, इकाई-14, इकाई-15 और इकाई-16 हैं। इकाई-13 में हम आपको **अविकल्पी युक्तियों** (Pure Strategies) वाले खेलों की मौलिक परिभाषाओं और खेल के महत्त्व से परिचित कराएंगे। इकाई-14 में हम **सविकल्प युक्तियों** (Mixed Strategies) वाले खेल पर चर्चा करेंगे जबकि इकाई-15 में हम खेलों को हल करने की ग्राफीय विधि और प्रमुखता गुणधर्म पर चर्चा करेंगे। अंतिम इकाई अर्थात् इकाई-16 में हम खेल सिद्धांत की समस्याओं को हल करने में रैखिक प्रोग्रामन विधि के अनुप्रयोग पर विशेष अध्ययन करेंगे।

इकाई 13 अविकल्पी युक्तियों वाले खेल (Games with Pure Strategies)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

अभी तक आपने उन निदर्शों (Models) का अध्ययन किया है जिनमें संगठन का कोई अपना हित होता था। उदाहरण के लिए, उद्देश्य फलन के इष्टतमीकरण के निदर्श अर्थात् रैखिक प्रोग्रामन, परिवहन और नियतन समस्याओं के जरिए लाभ का अधिकतमीकरण या खर्च का न्यूनतमीकरण। परन्तु, व्यावहारिक जीवन में, उस स्पर्धी स्थिति में निर्णय लेना आवश्यक हो जाता है जबकि विरोधी हित वाली दो या अधिक विरोधी पार्टियां हों और खेल का परिणाम सभी संबंधित पार्टियों के निर्णयों से नियंत्रित होता हो। इस प्रकार की समस्याएं प्रायः अर्थशास्त्र, व्यापार प्रशासन, समाज विज्ञान, राजनीति शास्त्र और सैनिक प्रशिक्षण में आती रहती हैं। ऊपर बतायी गई विभिन्न विज्ञानों अथवा शास्त्रों से संबंधित सभी समस्याओं में, जिनमें स्पर्धी स्थितियां अंतर्निहित होती हैं, व्यक्ति विवेकी ढंग से काम करता है और अपने हितों के संघर्ष को अपने पक्ष में लाने की कोशिश करता है। इस संदर्भ में बीसवीं शताब्दी में खेल-सिद्धांत विकसित किया गया। परन्तु, खेल-सिद्धांत का गणितीय उपचार (Mathematical Treatment) 1944 में जाकर उपलब्ध हो सका जबकि जॉन वॉन न्यूमां और आस्कर मोर्गेन्स्टन ने अपना शोध लेख 'खेल-सिद्धांत और आर्थिक व्यवहार' (Theory of the Games and Economic Behaviour) प्रकाशित किया। खेल-सिद्धांत की समस्याओं को हल करने के लिए न्यूमां ने जो दृष्टिकोण अपनाया वह अल्पमहिष्ठ नियम (Minimax Principle) पर आधारित था अर्थात् उसने अधिकतम हानियों को न्यूनतमीकरण करने की संकल्पना को लागू किया। इस नियम से अधिकांश स्पर्धी समस्याओं (Competitive Problems) पर विचार किया जा सकता है।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- खेल, n-व्यक्ति खेल, और दो-व्यक्ति शून्य-योग खेल को परिभाषित कर सकेंगे,
- भुगतान आव्यूह को परिभाषित कर सकेंगे;
- महत्तमल्पिष्ठ नियम और अल्पमहिष्ठ नियम को समझ सकेंगे;
- पल्याण बिन्दु या संतुलन बिन्दु ज्ञात कर सकेंगे;
- अधिकाल्पी वृत्तियों वाले खेल का मान ज्ञात कर सकेंगे।

13.2 मूल परिभाषाएं (Basic Definitions)

13.2.1 खेल (Game)

अपने दैनिक जीवन में आपको अनेक खेल देखने को मिले होंगे, जैसे शतरंज, ब्रिज, पोकर आदि जिन्हें दो या दो से अधिक खिलाड़ी खेलते हैं। इन सभी खेलों में स्पर्धा की भावना छिपी होती है। इन खेलों को निर्धारित नियमों के अनुसार खेला जाता है। इन खेलों में जब एक जीत जाता है या दूसरा हार जाता है तब खेल समाप्त माना जाता है। पर कभी-कभी ऐसा होता है कि खेल समाप्त हो जाता है, पर, हार-जीत का फैसला नहीं होता।

स्पर्धी स्थिति को खेल कहा जाता है जबकि इसके निम्नलिखित गुणधर्म हों :

i). प्रतियोगियों, जिन्हें खिलाड़ी कहा जाता है, की संख्या परिमित हो।

ii) प्रत्येक खिलाड़ी के पास परिमित संख्या में विकल्प, जिन्हें युक्ति (Strategy) कहा जाता है, हों। यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक खिलाड़ी के लिए विकल्पों की संख्या समान हो।

iii) प्रत्येक खिलाड़ी को पहले से ही खेल संबंधी सभी संबंधित जानकारी ज्ञात हो अर्थात् उसे प्रत्येक खिलाड़ी की अलग-अलग युक्तियों और एक खिलाड़ी की चाल (युक्ति) पर हुई लाभ की मात्रा ज्ञात हो।

iv) अपने लाभ को अधिकतम करने के लिए प्रत्येक खिलाड़ी को अपने विवेक से काम करना है। खेल तब शुरू होता है जबकि इस नियम के अनुसार प्रत्येक खिलाड़ी कुछ ....

v) खेल के परिणाम से भुगतान निर्धारित होता है जो कि धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

द्वि-व्यक्ति खेल (Two-Person Game)

यदि एक खेल को केवल दो खिलाड़ी खेलते हों तो इस खेल को द्वि-व्यक्ति खेल कहा जाता है। हालांकि प्रत्येक खिलाड़ी के पास गेम के हर खेल के अनेक संभव विकल्प हो सकते हैं।

n-व्यक्ति खेल (n-Person Game)

जिस खेल को n-व्यक्ति खेलते हैं उसे n-व्यक्ति खेल कहा जाता है। n-व्यक्ति खेल को द्वि-व्यक्ति खेल माना जा सकता है जबकि n-व्यक्तियों को उनकी रुचि के अनुसार दो दलों में बांटा जा सकता है।

द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल (Two-Person Zero-Sum Game)

दो व्यक्तियों द्वारा खेले जाने वाले उस खेल को जिसमें एक खिलाड़ी का लाभ दूसरे खिलाड़ी की हानि होती है द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल कहा जाता है। अर्थात् द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल में एक खेल के बाद दोनों खिलाड़ियों के लाभों का बीजीय योग शून्य होना चाहिए।

13.2.2 भुगतान आव्यूह (Pay-off Matrix)

उस आव्यूह को भुगतान आव्यूह कहा जाता है जिसमें खिलाड़ी द्वारा अपनी विशेष युक्ति को अपनाते ही खेल का परिणाम मालूम हो जाता है। मान लीजिए खिलाड़ी X के पास तीन युक्तियां 1, 2, 3 हैं और खिलाड़ी Y के पास दो युक्तियां 1, 2 हैं और भुगतान नीचे दी गई सारणी के अनुसार करनी है।

		खिलाड़ी Y	
		1	2
खिलाड़ी X	1	3	2
	2	−4	0
	3	2	1

इसका अर्थ यह है कि यदि खिलाड़ी X युक्ति 3 अपनाता है, जिसे सारणी की तीसरी पंक्ति से दर्शाया गया है, और खिलाड़ी Y युक्ति 2 अपनाता है, जिसे सारणी के दूसरे स्तंभ से दर्शाया गया है, तो खिलाड़ी X को राशि 1 की (जो कि सारणी की तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ के प्रतिच्छेद पर का अवयव है) प्राप्ति होती है। ध्यान दीजिए कि खिलाड़ी Y इस राशि 1 को हराता है। इसी प्रकार, यदि खिलाड़ी X, युक्ति 2 अपनाता है और खिलाड़ी Y युक्ति 1 अपनाता है, तो खिलाड़ी X को राशि 4 की प्राप्ति होती है अर्थात् खिलाड़ी राशि 4 हराता है। यहां फिर से ध्यान दीजिए कि तब खिलाड़ी Y इस राशि 4 को जीतता है। इस खेल का भुगतान आव्यूह यह होता है :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

तीन पंक्तियां खिलाड़ी X की तीन युक्तियों को प्रकट करती हैं और दो स्तंभ खिलाड़ी X की दो युक्तियों को प्रकट करते हैं। इस आव्यूह के अवयव खिलाड़ी X के भुगतान हैं। धनात्मक चिह्न का अर्थ है कि खिलाड़ी X जीत रहा है और ऋणात्मक का अर्थ है कि वह हार रहा है। खिलाड़ी Y को किया गया भुगतान, खिलाड़ी X का ऋणात्मक भुगतान है।

यहां यह देखा जा सकता है कि खिलाड़ी X को **अधिकतमकारी खिलाड़ी** (Maximizing Player) कहा जाता है, क्योंकि वह अपने लाभ को अधिकतम करना चाहता है। खिलाड़ी Y को न्यूनतमकारी खिलाड़ी कहा जाता है क्योंकि वह अपनी हानि को न्यूनतम करना चाहता है। भुगतान आव्यूहों वाले ऐसे खेलों को **आयतीय खेल** (Rectangular Games) भी कहा जाता है।

एक ऐसा भी खेल होता है जिसमें प्रत्येक खिलाड़ी ऐसी युक्ति अपनाता है कि उसे अधिक से अधिक लाभ हो। युक्तियां दो प्रकार की होती हैं–**अविकल्पी युक्ति** (Pure Strategy) और **सविकल्प युक्ति** (Mixed Strategy)। इस इकाई में हम अविकल्पी युक्ति पर चर्चा करेंगे और इकाई-14 में सविकल्प युक्तियों पर चर्चा करेंगे।

13.2.3 अविकल्पी युक्ति (Pure Strategy)

यदि एक खिलाड़ी सभी खेल के बारे में यह पहले से ही जानता हो कि उसे खेलने के लि केवल एक विधि ही अपनानी होगी, तो इस क्रिया-विधि का चयन करने के निर्णय को अविकल्पी युक्ति कहा जाता है। आपने ऊपर बताए गए उदाहरण में यह देखा है कि खिलाड़ी X के पास तीन क्रिया-विधियों (अर्थात् युक्तियां) हैं और खिलाड़ी Y के पास द क्रिया-विधियां हैं। यदि गेम के एक खेल में खिलाड़ी X युक्ति 1 अपनाता है, लेकिन खिलाड़ी Y युक्ति 2 अपनाता है तो हम कहते हैं कि खिलाड़ी X ने अविकल्पी युक्ति 1 को अपनाया है और खिलाड़ी Y अविकल्पी युक्ति 2 को अपनाया है।

अगली इकाई में आप यह देखेंगे कि कभी-कभी अविकल्पी युक्ति को लागू करना संभव नहीं होता, अत: किसी आयतीय खेल को हल करने के लिए **सविकल्प युक्ति** (Mixed Strategy) को परिभाषित करना आवश्यक होता है। यदि कोई खिलाड़ी कुछ समय के लिए एक विशेष क्रिया-विधि को लागू करने का निर्णय लेता है और फिर उस क्रिया-विधि को बदल देता है और एक-एक अन्य क्रिया-विधि को लागू करने का निर्णय लेता है और इस प्रक्रिया को वह जारी रखे रहता है, तो इस युक्ति को **सविकल्प युक्ति** (Mixed Strategy) कहा जाता है।

13.4 महाल्पिष्ठ और अल्पमहिष्ठ नियम (Maximin and Minimax Principle)

इस नियम के अनुसार खिलाड़ी एक निराशावादी प्रवृति अपनाता है और सुरक्षित खेल खेलता है अर्थात् सदा ही उसकी युक्ति ऐसी होती है कि खराब से खराब परिणाम में भी उसका सर्वोत्तम ही उसे प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, खिलाड़ी X (अधिकतमकारी खिलाड़ी) ऐसी युक्ति अपनाता है जिससे कि उसकी विभिन्न क्रिया-विधियों से निम्नतम लाभ का अधिकतम उसे प्राप्त होता है। इसे **महाल्पिष्ठ नियम** (Maximin Principle) कहा जाता है।

इसी प्रकार खिलाड़ी Y (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) भी सुरक्षित खेल खेलना चाहता है और इस संबंध में वह ऐसी युक्ति अपनाता है कि उसे अपनी विभिन्न कार्यवाइयों से हुई अधिकतम हानियों की निम्नतम उसे प्राप्त होती है। इसे **अल्पमहिष्ठ नियम** (Minimax Principle) कहा जाता है।

दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि अपनी इष्टतम युक्ति के लिए अधिकतमकारी खिलाड़ी **महाल्पिष्ठ निकष** (Maximin Criterion) को अपनाता है जबकि न्यूनतमकारी खिलाड़ी अल्पमहिष्ठ निकष को अपनाता है।

उदाहरण के लिए आइए हम एक खेल लें जिसका भुगतान आव्यूह यह है :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & Y & \\ I & II & III \end{array} \\ X \begin{array}{c} I \\ II \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस सारणी से यह देखा जा सकता है कि यदि खिलाड़ी X, युक्ति I को अपनाता है तो उसे कम से कम -5 प्राप्त होगा और यदि वह युक्ति II को अपनाता है तो उसे कम से कम -2 प्राप्त होगा। परन्तु, वह इन दो युक्तियों में से युक्ति II को अपनाकर सुरक्षित खेल खेलना चाहता है जिसमें वह -5 और -2 के निम्नतम लाभों में अधिकतम (-2) प्राप्त करता है। अतः महाल्पिष्ठ नियम के अनुसार खिलाड़ी X को युक्ति II अपनानी चाहिए।

इसी प्रकार, यदि खेल को Y की दृष्टि से देखा जाए तो जब वह युक्ति I अपनाता है उसे अधिकतम हानि -2 की होती है और जब वह युक्ति II और युक्ति III अपनाता है तो उसे अधिकतम हानि क्रमशः 3 और 2 की होती है। अब, यदि वह -2, 3, 2 की अधिकतम हानियों में से वह सुरक्षित खेल खेलना चाहता है, तो वह वही युक्ति अपनाएगा जो कि अधिकतम हानियों का न्यूनतम अर्थात् -2 हो जो कि उसकी युक्ति I के अनुदिश है। अतः वह पूरे खेल में युक्ति I अपनाकर खेल खेलना चाहेगा। इसलिए वह अल्पमहिष्ठ नियम (Minimax Principle) के अनुसार युक्ति I अपनाता है।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित भुगतान आव्यूह का अल्पमहिष्ठ और महाल्पिष्ठ मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : पंक्ति-निम्निष्ठ और स्तंभ-महिष्ठ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{स्तंभ महिष्ठ} & \begin{matrix} 6 & 3 & 6 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{प्रांक्ति-निम्रिष्ठ} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

क्योंकि स्तंभ महिष्ठ (6, 3, 6) का न्यूनतम 3 है, इसलिए दिए हुए आव्यूह का अल्पमाहिष्ठ मान 3 है। और, क्योंकि पंक्ति निम्रिष्ठ का अधिकतम 1 है (सभी तीन पंक्ति निम्रिष्ठ, 1 के बराबर हैं), इसलिए दिए हुए आव्यूह का महाल्पिष्ठ मान 1 है।

प्रश्न 1 : क) निम्नलिखित भुगतान आव्यूह का महाल्पिष्ठ और अल्पमहिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 35 & 65 & 25 & 5 \\ 30 & 20 & 15 & 0 \\ 55 & 60 & 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) दो कंपनियां A और B अपने उत्पाद के संबंध में स्पर्धा कर रही हैं। बाजार में अपने उत्पाद की बिक्री बढ़ाने के लिए कंपनी A निम्नलिखित युक्तियां अपनाती है :

A_1 - होम डेलिवरी सेवा

A_2 - मेल आर्डर सेवा

A_3 - ग्राहकों को मुफ्त उपहार

जबकि कंपनी B निम्नलिखित मीडिया विज्ञापन का सहारा लेती है :

B_1 - रेडियो

B_2 - पत्रिका

B_3 - समाचार पत्र

पिछले अनुभवों से यह पता चलता है कि कंपनी A का भुगतान आव्यूह यह होता है :

कंपनी B

$$\text{कंपनी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 12 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

दोनों कंपनियों की इष्टतम युक्ति क्या है?

13.3 भुगतान आव्यूह का पल्याण बिन्दु (Saddle Point of a Pay-off Matrix)

वह खेल, जिसमें X (अधिकतमकारी खिलाड़ी का महाल्पिष्ठ मान, Y (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) के अल्पमहिष्ठ मान के बराबर होता है तो इस खेल को एक **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) वाला खेल कहा जाता है। अत: पल्याण बिन्दु वाला खेल वह खेल होता है जिसमें दोनों ही खिलाड़ी अविकल्पी युक्तियों (Pure Strategies) को अपनाती हैं अर्थात् दोनों खिलाड़ी पूरे खेल में समान क्रिया-विधि अपनाते हैं। इस तरह, हम यह पाते हैं कि पल्याण बिन्दु दो खिलाड़ियों की इष्टतम अविकल्पी युक्तियों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है।

अत: पल्याण बिन्दु वह बिन्दु होता है जो कि भुगतान आव्यूह के उस अवयव के संगत होता है जो अपनी पंक्ति में सबसे छोटा और अपने स्तंभ में सबसे बड़ा होता है। पल्याण बिन्दु **को खेल का संतुलन बिन्दु (Equilibrium Point)** भी कहा जाता है।

पल्याण बिन्दु का पता लगाने के नियम (Rules for Detecting a Saddle Point)

i) प्रत्येक पंक्ति का न्यूनतम लीजिए और उन्हें गोले से घेर दीजिए।

ii) प्रत्येक स्तंभ का अधिकतम लीजिए और उन्हें छोटे वर्ग से घेर दीजिए।

iii) वह बिन्दु जो गोला और वर्ग दोनों के अंदर होता है एक पल्याण बिन्दु होता है।

टिप्पणी (Note)

i) आव्यूह का कोई पल्याण बिन्दु नहीं भी हो सकता। इस स्थिति में अविकल्पी युक्ति होती है।

ii) एक आव्यूह के एक से अधिक पल्याण बिन्दु हो सकते हैं। इस स्थिति में खेल के एक से अधिक इष्टतम हल होंगे।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित भुगतान आव्यूहों के पल्याण बिन्दु ज्ञात कीजिए :

क) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : क) दिए हुए आव्यूह में हम प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम को एक गोले से घेर देते हैं और प्रत्येक स्तंभ के अधिकतम को एक वर्ग $\square$ से घेर देते हैं।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & \boxed{6} \\ \boxed{2} & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस तरह, महाल्पिष्ठ मान और अल्पमहिष्ठ मान दोनों ही 2 हैं, जो कि दूसरी पंक्ति और पहले स्तंभ के प्रतिच्छेद पर है। अत: पल्याण विन्दु स्थिति (2, 1) पर है अर्थात् खिलाड़ी A की सर्वोत्तम युक्ति A_2 है और खिलाड़ी B की सर्वोत्तम युक्ति B_1 है।

ख) दिए हुए आव्यूह में हम प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम को एक गोले से घेर देते हैं और प्रत्येक स्तंभ के अधिकतम को एक वर्ग □ से घेर देते हैं।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & \boxed{1} \\ 0 & -4 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

अत: हमारे पास दो पल्याण बिन्दु हैं क्योंकि हमने दो बिन्दुओं को गोले से घेरा है तथा उन पर वर्ग डाला है यह पल्याम विन्दु है (A_1, B_1)) और (A_1, B_3)

प्रश्न 2 : निम्नलिखित भुगतान आव्यूहों के पल्याण विन्दु निकालिए।

क) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ -7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) खिलाड़ी Y

$$\text{खिलाड़ी X}\quad \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

13.4 खेल का मान (Value of the Game)

यदि X (अधिकतमकारी खिलाड़ी) का महाल्पिष्ठ मान, Y (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) के अल्पमहिष्ठ मान के बराबर हो, तो खेल का एक पल्याण विन्दु या संतुलन बिन्दु होता है

और संगत युक्तियों को इष्टतम युक्ति कहा जाता है। संतुलन विन्दु के भुगतान की मात्रा को खेल का मान कहा जाता है और इसे V से प्रकट किया जाता है।

और, यदि दो मान, X का महाल्पिष्ठ मान और Y का अल्पमहिष्ठ मान बराबर न हों, तो एक भी पल्याण बिन्दु नहीं होगा और X के महाल्पिष्ठ मान को खेल का **निम्न मान** (Lower Value) कहा जाता है और इसे V से प्रकट किया जाता है, जबकि Y के अल्पमहिष्ठ मान को खेल का उपरि मान (Upper Value) कहा जाता है और इसे v से प्रकट किया जाता है। मान लीजिए a_{ij}, भुगतान आव्यूह के अवयवों को प्रकट करते हैं, तब

$\underline{v} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ = पंक्ति अल्पिष्ठ का अधिकतम और

$\overline{v} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ = स्तंभ महिष्ठ का न्यूनतम यहां यह दिखाया जा सकता है कि $\underline{v} = \overline{v}$.

एक खेल को **न्याय्य खेल** (Fair Game) कहा जाता है, जबकि $v = 0 = \overline{v}$.

उदाहरण 3 : उस खेल को हल कीजिए जिसके भुगतान आव्यूह नीचे दिए गए हैं :

क)

खिलाड़ी Y

$$\text{खिलाड़ी X}\quad \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख)

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : क) हम प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम को एक गोले से घेर देते हैं और प्रत्येक स्तंभ के अधिकतम को एक वर्ग से घेर देते हैं।

खिलाड़ी Y

$$\text{खिलाड़ी X}\quad \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 & \boxed{6} \\ 2 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{5} & -2 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस तरह, दूसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ के प्रतिच्छेद पर यह मान होता है। अत: पल्याण बिन्दु (2, 2) पर होता है अर्थात् खिलाड़ी X की सर्वोत्तम युक्ति X_2 है और खिलाड़ी Y की सर्वोत्तम युक्ति Y_2 है तथा खेल का मान 0 है। अत: खेल एक **न्याय्य खेल** (Fair Game) है।

ख) . हम प्रत्येक पंक्ति के न्यूनतम को एक गोले से घेर देते हैं प्रत्येक स्तंभ के अधिकतम को एक वर्ग से घेर देते हैं।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & -5 & 2 & 0 & 7 \\ A_2 & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{4} & \boxed{8} \\ A_3 & 4 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

यहां हम पाते हैं कि दोनों ही प्रतीक 0 और −4, 4 पर हैं जो कि दूसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ के प्रतिच्छेद पर स्थित है। इस तरह, खिलाड़ी A की सर्वोत्तम युक्ति A_2 है और खिलाड़ी B की सर्वोत्तम युक्ति B_3 है अर्थात् A और B की इष्टतम स्थितियां $S_0 = (A_2, B_3)$ और खेल का मान $v = 4$.

अत: खिलाड़ी A के लिए खेल का मान 4 है और खिलाड़ी के लिए -4 है और, क्योंकि खेल का मान शून्य नहीं है, इसलिए यह न्याय्य खेल नहीं है, हालांकि इसे निरंतर ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्न 3 : क्या निम्नलिखित भुगतान आव्यूहों के पल्याण बिन्दु हैं? यदि हैं, तो संगत आव्यूह के हल और मान क्या हैं? यह भी बताइए कि कौन सा खेल न्याय्य खेल है।

क) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

ग) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

घ) खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

प्रश्न 4 : इस खेल को हल कीजिए जिसका भुगतान आव्यूह यह है

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

13.5 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमनें जो कुछ पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए इस इकाई को हम यहीं समाप्त करते हैं।

1) खेल और द्वि-व्यक्तीय शून्य योग खेल की परिभाषाएं।

2) महाल्पिष्ठ नियम जो कि अधिकतमकारी खिलाड़ी के लिए प्रत्येक पंक्ति के भुगतान के अल्पिष्ठों का अधिकतम होता है, और अल्पमहिष्ठ नियम जो कि न्यूनतमकारी खिलाड़ी के लिए प्रत्येक स्तंभ के भुगतानों के महिष्ठों का न्यूनतम होता है।

3) पल्याण बिन्दु जो अधिकतमकारी खिलाड़ी और न्यूनतमकारी खिलाड़ी दोनों सर्वोत्तम युक्तियों के प्रतिच्छेद पर होता है।

4) इष्टतम युक्तियां और खेल का मान जो कि दोनों खिलाड़ियों की सर्वोत्तम युक्तियों पर स्थित भुगतान आव्यूह का मान होता है।

5) खेल को न्याय्य खेल कहा जाता है जबकि खेल का मान शून्य हो।

13.6 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E1) क) यहां पंक्ति अल्पिष्ठ 5, 0, 10 हैं। अतः महाल्पिष्ठ मान 10 है और स्तंभ महिष्ठ 55, 65, 25, 15 है और अल्पमहिष्ठ मान 15 है।

ख) कंपनी A की इष्टतम युक्तियां A_2 है और कंपनी B की B_1 है। इस तरह, इष्टतम युक्तियां $S_0 = (A_2, B_1)$.

E2) क) पल्याण बिन्दु (A_2, B_2) हैं।

ख) पल्याण बिन्दु (X_2, Y_3) हैं।

E3) क) $\underline{v} = 0$ और $\overline{v} = 2$ अतः इस खेल का कोई पल्याण बिन्दु नहीं है।

ख) इष्टतम युक्तियाँ $S_0 = (A_1, B_1)$; $v = 0$ यह खेल न्याय्य है।

ग) इष्टतम युक्तियाँ $S_0 = (A_i, B_j)$; $i = 1, 2$; $j = 1, 2$; $v = 1$.

घ) इष्टतम युक्तियाँ $S_0 = (A_2, B_2)$; $v = 4$

E4) इष्टतम युक्तियाँ $S_0 = (A_2, B_3)$ हैं और खेल का मान $v = -1$.

13.7 शब्दावली (Glossary)

अल्पमहिष्ठ नियम	Minimax Principle
अविकल्पी युक्ति	Pure Strategy
आव्यूह खेल	Matrix Game
न्याय्य खेल	Fair Game
पल्याण बिन्दु	Saddle Point
भुगतान	Pay-off
महाल्पिष्ठ नियम	Maximin Principle
युक्ति	Strategy
संतुलन बिन्दु	Equilibrium Point
सविकल्प युक्ति	Mixed Strategy

इकाई 14 सविकल्प युक्तियों वाले खेल (Games with Mixed Strategies)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

अभी तक आपने **अविकल्पी युक्तियों** (Pure Strategies) वाले खेलों के हल के बारे में अध्ययन किया है जहां आप खेल को तभी हल कर सकते थे जबकि अधिकतमकारी खिलाड़ी का **महाल्पिष्ठ मान** (Maximin Value) न्यूनतमकारी खिलाड़ी के **अल्पमहिष्ठ मान** (Minimax Value) के बराबर होता हो। दूसरे शब्दों में खेल का मान केवल तभी प्राप्त किया जा सकता था जबकि एक **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) या **संतुलन बिन्दु** (Equilibrium Point) होता हो और तब खेल का अविकल्पी युक्तियों वाला खेल कहा जाता है। परन्तु, जब खेल में कोई पल्याण बिन्दु न हो, तब इस खेल को सविकल्प युक्तियों वाला खेल कहा जाता है। इस प्रकार के खेल को हल करने के लिए प्रत्येक खिलाड़ी **संयोग चाल** (Chance Move) की संकल्पना को अपनाता है। प्रत्येक खिलाड़ी यादृच्छिक ढंग से कुछ इस तरह खेलना शुरू करता है कि गेम के अनेक खेलों पर उसका औसत भुगतान इष्टतम हो, हालांकि गेम के किसी भी एक प्ले में वह अधिक हार सकता है। दूसरे शब्दों में, कुछ समय के लिए खिलाड़ी एक युक्ति को अपनाता है, उसके बाद वह एक दूसरी युक्ति पर आ जाता है और कुछ समय के बाद वह तीसरी युक्ति पर आ जाता है और इस तरह यह प्रक्रिया जारी रहती है जिससे कि गेम के अनेक खेलों पर औसत भुगतान इष्टतम हो जाता हो (अर्थात् अधिकतमकारी खिलाड़ी के लिए अधिकतम और न्यूनतमकारी खिलाड़ी के लिए न्यूनतम)।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- सविकल्प युक्तियों वाले खेल को हल कर सकेंगे;
- प्रत्याशित मान या प्रत्याशित भुगतान का अर्थ समझ सकेंगे;
- सविकल्प युक्तियों वाले खेल का मान ज्ञात कर सकेंगे।

14.2 सविकल्प युक्तियां (Mixed Strategies)

यदि खिलाड़ी पूरे खेल में एक ही युक्ति से नहीं चिपका रहता बल्कि अन्य युक्तियों का भी इस तरह प्रयोग करता है कि उसके विरोधी को इसका आभास भी नहीं हो पाता और साथ ही वह स्वयं भी नहीं जानता कि उसकी अगली चाल क्या होगी, तब यह कहा जाता है कि खेल को सविकल्प युक्तियों के साथ खेला गया है। दूसरे शब्दों में, सविकल्प युक्तियों वाला खेल वह खेल होता है जहां पल्याण बिन्दु (Saddle Point) का अस्तित्व नहीं होता।

14.2.1 सविकल्प युक्ति का अर्थ (Meaning of Mixed Strategy)

निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाला एक आयतीय खेल लिजिए :

खिलाड़ी Y

$$\text{खिलाड़ी } X \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

यहां खिलाड़ी X के पास m युक्तियां (1, 2, ..., m) हैं और खिलाड़ी Y के पास n युक्तियां (1, 2, ..., n) हैं। यदि ऊपर दिए गए आव्यूह का एक पल्याण बिन्दु हो, अर्थात्

$$\underset{i}{\text{Max}}\ \underset{j}{\text{Min}}\ a_{ij} = \underset{j}{\text{Min}}\ \underset{i}{\text{Max}}\ a_{ij} = a_{hk}$$

तो इकाई 13 में हमने जो पढ़ा है उसके अनुसार खिलाड़ी X की सर्वोत्तम युक्ति अविकल्पी युक्ति h है, खिलाड़ी Y की सर्वोत्तम युक्ति अविकल्पी युक्ति k है और खेल का मान a_{hk} है।

यदि $\underset{i}{\text{Max}}\ \underset{j}{\text{Min}}\ a_{ij} \neq \underset{j}{\text{Min}}\ \underset{i}{\text{Max}}\ a_{ij} = a_{hk}$.

तो खिलाड़ियों की अविकल्पी युक्तियां इष्टतम (Optimal) नहीं होती और तब हमें एक सविकल्प युक्ति को परिभाषित करना होता है।

खिलाड़ी X की **सविकल्प युक्ति** (Mixed Strategy). m ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का सदिश $x = (x_1, ..., x_m)$ होती है जो प्रतिबंध $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ को संतुष्ट करती है जहां x_i को वह **प्रायिकता** (Probability) माना जा सकता है जिससे खिलाड़ी X युक्ति i को चुनता है। इसी प्रकार खिलाड़ी Y की सविकल्प युक्ति n ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का सदिश $y = (Y_1, ..., Y_n)$ है जो प्रतिबंध $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ को संतुष्ट करता हो जहां y को वह प्रायिकता माना जा सकता है जिससे खिलाड़ी Y, युक्ति j को चुनता है। इस संबंध में आप भाग 13.2.3 में दिए गए उदाहरण को ले सकते हैं और खिलाड़ी X के लिए सविकल्प युक्ति $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ को एक अर्थ दे सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि गेम के हर खेल पर खिलाड़ी X को चाहिए कि वह युक्ति 1 को प्रायिकता $\frac{1}{2}$ (अर्थात् $\frac{3}{6}$) से चुने, युक्ति 2 को प्रायिकता $\frac{1}{3}$ (अर्थात् $\frac{2}{6}$) से चुने और युक्ति 3 को प्रायिकता $\frac{1}{6}$ से चुने। खिलाड़ी X के लिए इसे लागू करने की विधि यह है कि प्रत्येक खेल पर एक पाशक फेंका जाए और युक्ति का चयन किया जाए जबकि पाशक पर 1, 2, 3 आता हो, और यदि पाशक पर अंक 6 आता हो तो युक्ति 3 लीजिए। इसी प्रकार खिलाड़ी Y के लिए सविकल्प युक्ति $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ का अर्थ यह है कि गेम के हर खेल पर खिलाड़ी Y युक्ति 1 को प्रायिकता $\frac{2}{3}$ (अर्थात् $\frac{4}{6}$) से चुनता है और युक्ति 2 को प्रायिकता $\frac{1}{3}$ (अर्थात् $\frac{2}{6}$) से चुनता है। इस संबंध में खिलाड़ी पाशक फेंक सकता है, यदि पाशक पर अंक 1, 2, 3, 4 आते हों तो युक्ति 1 का प्रयोग कर सकता है और यदि अंक 5, 6 आते हों तो युक्ति 2 का प्रयोग कर सकता है।

यहां आपने यह देखा है कि सविकल्प युक्तियों के समुच्चय के अंतर्गत अविकल्पी युक्तियों का समुच्चय भी आता है। वास्तव में, खिलाड़ी X की अविकल्पी युक्ति k सविकल्प युक्ति $x = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$ की एक विशिष्ट स्थिति है जहां $x_k = 1$ और अन्य सभी $x_i = 0$ खिलाड़ी X की सभी सविकल्प युक्तियों के समुच्चय को S से प्रकट करेंगे और खिलाड़ी Y की सभी सविकल्प युक्तियों के समुच्चय को T से प्रकट करेंगे। दूसरे शब्दों में,

$$S = \left\{x \mid x = (x_1, ..., x_m)\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., m\right\}$$

$$T = \left\{y \mid y = (y_1, ..., y_n)\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, ..., n\right\}$$

14.2.2 प्रत्याशित मान (Expected Value)

इकाई 13 में आपने यह देखा है कि भुगतान आव्यूह $A = (a_{ij})$ वाले खेल में यदि खिलाड़ी X अविकल्पी युक्ति i अपनाता हो और खिलाड़ी Y अविकल्पी युक्ति j अपनाता हो तो परिणाम a_{ij} होता है। यदि a_{ij} धनात्मक हो, तो खिलाड़ी X जीतता है और यदि a_{ij} ऋणात्मक हो, तो वह हारता है। बाद वाली स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि खिलाड़ी Y जीतता है।

इसके विपरीत यदि खिलाड़ी X, सविकल्प युक्ति $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ का प्रयोग करता हो और खिलाड़ी Y सविकल्प युक्ति $y = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$ का प्रयोग करता हो, तो हमें परिणाम का मान ज्ञात करने की विधि जानने की आवश्यकता होती है।

इसके लिए हम **प्रायिकता सिद्धांत** (Probability Theory) से '**प्रत्याशित मान**' (Expected Value) की संकल्पना को लागू करते हैं। प्रायिकता सिद्धांत में एक घटना का प्रत्याशित मान उस घटना के प्रत्येक संभव परिणामों और घटना घटने की प्रायिकता के गुणनफलों का जोड़ होता है। इसलिए, यदि खिलाड़ी X सविकल्प युक्ति $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ को अपनाता हो और खिलाड़ी Y सविकल्प युक्ति $y = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$ को अपनाता हो, तो परिणाम a_{ij} प्रायिकता $x_i y_j$ से प्राप्त होगा। क्योंकि यह युक्ति i अपनाने वाले खिलाड़ी X और युक्ति j को अपनाने वाले खिलाड़ी Y दोनों की प्रायिकता है। इस तरह, खेल का प्रत्याशित मान सभी गुणनफलों $x_i a_{ij} y_k$ का जोड़ होता है, अर्थात् जोड़ $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$

$$\text{अर्थात्} \quad (x_1, \ldots, x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}$$

अर्थात् XAY^1

यहां आप यह देख सकते हैं कि यदि खिलाड़ी X, सविकल्प युक्ति $x = (x_1, \ldots, x_m)$ को चुनता है और खिलाड़ी Y, अविकल्पी युक्ति j (अर्थात् सविकल्प युक्ति $y = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, जहां 1, केवल jवें स्थान पर होता है) को चुनता है, तब प्रत्याशित मान $= \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$

इसी प्रकार, यदि खिलाड़ी X अविकल्पी युक्ति i (अर्थात् सविकल्प युक्ति $x = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, जहां '1' केवल iवीं स्थिति पर होता है) को चुनता है और खिलाड़ी Y सविकल्प युक्ति $y = (y_1, \ldots, y_n)$ को चुनता है, तो प्रत्याशित मान $= \sum_{j} a_{ij} y_j$

14.2.3 खेल का मान (Value of the Game)

यहां हम दो खिलाड़ियों द्वारा अपनायी गई सविकल्प युक्तियों के संबंध में खेल का मान परिभाषित करने के लिए हम उन्हीं चरणों को लागू करेंगे जो कि इकाई 13 में हमने अविकल्पी युक्तियों के संबंध में की थी। कोटि $m \times n$ के भुगतान आव्यूह A वाला खेल लीजिए।

प्रत्येक सविकल्प युक्ति $x = (x_1, \ldots, x_m)$ को लागू करने पर खिलाड़ी X को खेल का

सबसे खराब परिणाम प्राप्त होगा जिससे यह पता चलता है कि खिलाड़ी Y की भी सविकल्प युक्तियों $y = (y_1, ..., y_n)$ होती हैं। तब Min n $A_{y'}$ होगा।

यह निम्नतम मान खिलाड़ी X के निम्नतम लाभ को प्रकट करता है जबकि उसे युक्ति x चुनना होता है। क्योंकि वह अपने लाभ को अधिकतम करना चाहता है, इसलिए खिलाड़ी X को एक ऐसी युक्ति का पता लगाना होगा जिससे इन अल्पिष्ठों का अधिकतम प्राप्त हो जाता हो, अर्थात् एक ऐसी युक्ति x^* अपनानी होगी जिससे कि

$$\min_{y \in T} x^* A y' = \max_{x \in S} \min_{y \in T} x A y'$$

इसी प्रकार प्रत्येक युक्ति $y = (y_1, ..., y_j)$ का प्रयोग करने पर खिलाड़ी Y को खेल का सबसे खराब परिणाम प्राप्त होना चाहिए जबकि उसे यह ज्ञात हो कि खिलाड़ी X की भी सविकल्प युक्तियों $x = (x_{15}, ...x_m)$ हैं जिसका प्रयोग उसकी आय को अधिकतम करने में की जाएगी। इससे यह पता चलता है कि खिलाड़ी Y को इस बात के लिए तैयार रहना चाहिए कि वह Max xAy', खिलाड़ी X को दे दें। क्योंकि खिलाड़ी Y का उद्देश्य खिलाड़ी A के लाभ को कम से कम करना है, इसलिए खिलाड़ी Y एक ऐसी युक्ति y का पता लगाता है जिससे कि

$$\max_{x \in S} xAy^* = \min_{y \in T} \max_{x \in S} xAy'$$

इस चरण पर सविंकल्प युक्ति वाले खेल की अविकल्पी युक्तिपूर्ण पल्याण विन्दु को परिभाषित किया जा सकता है। यदि

$$\max_{x \in S} \min_{y \in T} xAy' = \min_{y \in T} \max_{x \in S} xAy' = x^*Ay^{*\prime}$$

तो (x^*, y^*) को खेल का युक्तिपूर्ण पल्याण विन्दु (Strategic Saddle Point) कहा जाता है, जहां x^* और y^* इष्टतम युक्तियों को परिभाषित करता है और $v = x^*Ay^*$ खेल का मान है।

सविकल्प युक्तियों वाले खेल को प्रायः निम्नलिखित कुछ विधियों से हल किया जाता है :

1. बीजीय विधि
2. ग्राफीय विधि
3. रैखिक प्रोग्रामन विधि

इस इकाई में हम बीजीय विधि पर चर्चा करेंगे और अन्य दो विधियों पर चर्चा हम इकाई 15 और इकाई 16 में करेंगे।

14.3 बीजीय विधि (Algebraic Method)

हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इस विधि पर चर्चा करेंगे।

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए कोटि 2 × 2 वाले भुगतान आव्यूह के रूप में द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल को हल कीजिए।

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c c} & \text{खिलाड़ी B} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : क्योंकि दिए हुए आव्यूह में ऐसा कोई मान नहीं है जो पंक्ति में सबसे छोटा हो और स्तंभ में सबसे बड़ा हो, इसलिए इसमें कोई पल्याण बिन्दु (Saddle Point) नहीं होगा और खेल अविकल्पी युक्तियों वाला नहीं होगा अर्थात् पूरे खेल में कोई भी खिलाड़ी A या B समान युक्ति नहीं अपनाएगा, लेकिन वे सविकल्प युक्तियाँ अपना सकते हैं अर्थात् खिलाड़ी A कुछ समय के लिए अपनी पंक्तियों A_1 और A_2 में से प्रत्येक पंक्ति को खेलेगा और खिलाड़ी B कुछ समय के लिए अपने स्तंभों B_1 और B_2 में से प्रत्येक स्तंभ को खेलेगा। अत: यदि खिलाड़ी A समय t_1 तक युक्ति A_1 का प्रयोग करता है, तो वह अपनी दूसरी युक्ति A_2 का प्रयोग बाकी समय $(1 - t_1)$ के लिए करेगा। इसी प्रकार, यदि खिलाड़ी B समय t_2 तक के लिए युक्ति B_1 का प्रयोग करता है, तो वह अपनी दूसरी युक्ति B_2 का प्रयोग बाकी समय $(1 - t_2)$ के लिए करेगा। (खेल का पूरा समय 1 माना गया है)। इसका विवेचन प्रायिकताओं के रूप में भी किया जा सकता है। यदि खिलाड़ी A युक्ति A_1 का चयन प्रायिकता p से करता है तो वह युक्ति A_2 का प्रयोग प्रायिकता $(1 - p)$ से करेगा, क्योंकि प्रायिकताओं का जोड़ 1 के बराबर होता है। इसी प्रकार, यदि खिलाड़ी B युक्ति B_1 का चयन प्रायिकता q से करता है, तो वह युक्ति B_2 का प्रयोग प्रायिकता $(1 - q)$ से करेगा। दिए हुए भुगतान आव्यूह में मान लीजिए कि खिलाड़ी A युक्ति A_1 का चयन प्रायिकता p से करता है, तो वह युक्ति A का चयन प्रायिकता $(1 - p)$ से करेगा। अब मान लीजिए कि खिलाड़ी B युक्ति B_1 का चयन करता है और इसका प्रयोग वह पूरे खेल में करता है तो इस खेल में खिलाड़ी A का प्रत्याशित भुगतान या प्रत्याशित लाभ दो घटनाओं के प्रत्याशित मान के बीजीय योग के बराबर होगा अर्थात्

$$25p + 10(1 - p)$$

लेकिन, यदि खिलाड़ी B युक्ति B_2 का चयन करता है और इसका प्रयोग पूरे खेल में करता है तो इस खेल में खिलाड़ी का प्रत्याशित भुगतान या प्रत्याशित लाभ यह होगा

$$5p + 15(1 - p)$$

अब यदि खिलाड़ी A उस युक्ति से अपने को अलग रखता है जिस युक्ति का चयन B ने किया है, तो खिलाड़ी A की इष्टतम योजना ऐसी होनी चाहिए कि

$$25p + 10(1 - p) \geq v$$

$$5p + 15(1 - p) \geq v$$

जहां v खेल का मान है। यदि दोनों इस मान में संतुष्ट होते हों, तो

$$25p + 10(1 - p) = 5p + 15(1 - p)$$

$$\Rightarrow 15p + 10 = 15 - 10p$$

$$\Rightarrow 25p = 5$$

$$\Rightarrow p = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = .2$$

$$\text{और} \quad 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = .8$$

अत: खिलाड़ी A युक्ति A_1, का चयन प्रायिकता $\frac{1}{5}$ से करेगा और युक्ति A_2 का चयन प्रायिकता $\frac{4}{5}$ से करेगा।

इसी प्रकार, यदि खिलाड़ी B, युक्तियों B_1 और B_2 का चयन क्रमशः प्रायिकताओं q और (1 − q) से करता हो, तो जब खिलाड़ी A पूरे खेल में युक्ति A_1 को अपनाता है तब खिलाड़ी B को प्रत्याशित भुगतान या प्रत्याशित हानि यह होगी

$$25q + 5(1 - q)$$

और जब खिलाड़ी A पूरे खेल में युक्ति A_2 को अपनाता है तब खिलाड़ी को प्रत्याशित भुगतान या प्रत्याशित हानि यह होगी

$$10q + 15(1 - q)$$

अतः खिलाड़ी A कोई भी युक्ति क्यों न अपनाए, खिलाड़ी B को युक्ति $y = (y, 1 - y)$, ही अपनानी चाहिए जिससे कि

$$25y + 5(1 - y) \geq u$$

और $10y + 15(1 - y) \geq v$

इन्हें समिकाओं के रूप में लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$25q + 5(1 - q) = 10q + 15(1 - q)$$

$$\Rightarrow 20q + 5 = 15 - 5q.$$

$$\Rightarrow 25q = 10$$

$$\Rightarrow q = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = .4$$

और $\quad 1 - q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = .6$

अतः खिलाड़ी B, युक्तियों B_1 और B_2 का चयन क्रमशः प्रायिकताओं $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ से करेगा।

किसी भी प्रत्याशित मान में p या q के मान को प्रतिस्थापित करके खेल का मान प्राप्त किया जाता है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

खिलाड़ी A को प्रत्याशित लाभ

i) $\quad 25 \times .2 + 10 \times .8 = 13$

ii) $\quad 5 \times .2 + 15 \times .8 = 13$

इसी प्रकार खिलाड़ी B को प्रत्याशित हानि

i) $\quad 25 \times .4 + 5 \times .6 = 13$

ii) $\quad 10 \times .4 + 15 \times .6 = 13$

इस तरह, खेल का मान खिलाड़ी A के प्रत्याशित लाभ या खिलाड़ी B की प्रत्याशित हानि के बराबर होता है। अतः खेल का मान = v = 13.

वैकल्पिक लघु विधि (Alternative for Short-cut Method)

यदि मूल खेल में कोटि 2×2 वाला एक भुगतान आव्यूह हो और इसमें कोई भी पल्याण बिन्दु न हो तो प्रत्येक खिलाड़ी को कौन सी युक्ति अपनानी चाहिए, उसे इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

मान लीजिए मूल खेल यह है :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

चरण I : प्रत्येक पंक्ति के छोटे भुगतान को बड़े भुगतान से घटाइए और प्रत्येक स्तंभ के छोटे भुगतान को बड़े भुगतान से घटाइए।

$$\begin{array}{ccl} & B & \\ A & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (25-5) = 20 \\ (15-10) = 5 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} (25-10) & (15-5) \\ = 15 & = 10 \end{array} & \end{array}$$

चरण II : चरण I में प्राप्त घटायी गई संख्याओं के इन युग्मों में से प्रत्येक को अदल-बदल दीजिए।

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 20 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 10 & 15 \end{array} & \end{array}$$

चरण III : अदल-बदल की प्रत्येक संख्या को संख्या-युग्म (Pair of Numbers) के योग पर लीजिए।

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \dfrac{5}{20+5} \\ \dfrac{20}{20+5} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \dfrac{10}{10+15} & \dfrac{15}{10+15} \end{array} & \end{array}$$

चरण IV : अपेक्षित युक्तियाँ प्राप्त करने के लिए इन भिन्नों को हल कीजिए।

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{4}{5} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} \end{array} & \end{array}$$

चरण V : खिलाड़ी की दृष्टि से उसके प्रत्याशित मान को ज्ञात करके खेल का मान प्राप्त किया जा सकता है। खिलाड़ी A का प्रत्याशित मान (प्रत्याशित लाभ) (i) या (ii) से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है।

i) $\left(25 \times \frac{1}{5}\right) + \left(10 \times \frac{4}{5}\right) = 13$

ii) $\left(5 \times \frac{1}{5}\right) + \left(15 \times \frac{4}{5}\right) = 13$

खिलाड़ी B का प्रत्याशित मान (प्रत्याशित हानि), (iii) या (iv) से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है।

iii) $\left(25 \times \frac{2}{5}\right) + \left(5 \times \frac{3}{5}\right) = 13$

iv) $\left(10 \times \frac{2}{5}\right) + \left(15 \times \frac{2}{5}\right) = 13$

अत: खेल का नाम = v = 13.

टिप्पणी : लघु विधि केवल तभी लागू की जा सकती है जबकि खेल का भुगतान आव्यूह, कोटि 2 × 2 वाला हो और इसमें कोई पल्याण बिन्दु न हो।

उदाहरण 2 : खेल को हल कीजिए जिसका भुगतान आव्यूह यह है :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : दिया हुआ भुगतान आव्यूह यह है :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

चरण I : भुगतानों को घटाने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 3-(-4) = 7 \\ 6-(-4) = 10 \end{array} \end{array}$$

$$6-(-4) = 10 \qquad 3-(-4) = 7.$$

चरण II : युग्मों का अदला-बदली करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 10 \\ 7 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 7 & 10 \end{array} & \end{array}$$

चरण III : योग पर युग्मों को रखने और सरल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
A & \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\dfrac{10}{10+7} = \dfrac{10}{17} \\[2ex]
\dfrac{7}{10+7} = \dfrac{7}{17}
\end{array}
$$

$$
\frac{7}{7+10} \quad \frac{10}{7+10}
$$

$$
= \frac{7}{17} \qquad \frac{10}{17}
$$

अत: खिलाड़ी A की युक्तियां (A_1, A_2) $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$ हैं और खिलाड़ी B की युक्तियां (B_1, B_2) क्रमश: $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$ हैं।

चरण IV : A के प्रत्याशित मान से खेल का मान v इस प्रकार प्राप्त होता है :

$$
V = \left(-4 \times \frac{10}{7}\right) + 6\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{2}{17}.
$$

प्रश्न 1 : निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाले खेल को हल कीजिए।

$$
\text{(क)} \quad
\begin{array}{cc}
 & B \\
A & \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
 & B \\
A & \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

प्रश्न 2 : यह मानकर कि A और B के भुगतान आव्यूह निम्नलिखित हैं और राशियाँ A द्वारा जीती गई और B द्वारा हारी गई उपयोगिताएं हैं।

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{खिलाड़ी B} \\
\text{खिलाड़ी A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

i) A की **सविकल्प युक्ति** (Mixed Strategy) और B की भी सविकल्प युक्ति क्या है?

ii) यदि A और B दोनों ही सविकल्प युक्तियों को अपनाते हैं, तो खेल का मान क्या होगा?

प्रश्न 3 : एक खेल का भुगतान आव्यूह यह है :

$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
A & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

दिखाइए कि $E(x, y) = 1 - 2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$. जहां x और y युक्तियों A_1 और B_1 के लिए A और B की प्रायिकताएं हैं। यह भी दिखाइए कि खेल के हल में खिलाड़ी A अविकल्पी युक्ति अपनाता है जबकि खिलाड़ी B अविकल्पी या सविकल्प युक्ति अपना सकता है।

14.4 कोटि $m \times 2$ या $2 \times n$ वाले भुगतान आव्यूह (Pay-off Matrices of Order $m \times 2$ or $2 \times n$)

यदि भुगतान आव्यूह 2×2 की कोटि वाले नहीं हों और इसमें कोई **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) नहीं हो, तो इसे ग्राफीय विधि से (जिस पर चर्चा इकाई 15 में की जाएगी। हल किया जा सकता है। फिर भी $m \times 2$ या $2 \times n$ को कोटि वाले खेल को **उप-खेल** (Sub-Games) मानकर जिनमें से प्रत्येक 2×2 की कोटि वाले हों. इसे हल किया जा सकता है। क्योंकि स्थिति के अनुसार खिलाड़ी X या Y अपनी दो पंक्तियों या स्तंभों में से किसी एक से खेल सकता है। उप-खेल वाली विधि को नीचे के उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 3 : किन्ही दो व्यक्तियों से संबंधित निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाले कोटि 4×2 के खेल को हल कीजिए :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -4 \\ 2 & -9 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : दिए हुए खेल में कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। और, क्योंकि खिलाड़ी B के पास खेलने के केवल दो विकल्प हैं, इसलिए खिलाड़ी A भी केवल दो युक्तियों का प्रयोग करेगा। खिलाड़ी A इस 4×2 खेल को 2×2 की साइज वाला है उप-खेल मान सकता है। ये है उप-खेल निम्नलिखित हो सकते हैं :

(i)
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \end{array}$$

(v) B

$$A\ \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(vi) B

$$A\ \begin{array}{c} \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

अब हम **अविकल्पी युक्ति** (Pure Strategy) से द्वै उप-खेलों को हल करते हैं और यदि **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) नहीं है, तो इन खेलों को सविकल्प युक्तियों (लघु विधि) से इस प्रकार हल करते हैं।

उप-खेल (i) : क्योंकि यहां कोई भी पल्याण बिन्दु नहीं है, इसलिए **सविकल्प युक्तियां** (Mixed Strategies) इस प्रकार ज्ञात की जाती हैं :

B

$$A\ \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 2/5 & 3/5 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1/5 \\ 4/5 \\ \\ \end{array}$$

और $V = -2 \times \frac{1}{5} - 4 \times \frac{4}{5} = -\frac{18}{5} = -3.60$

उप-खेल (ii) : यहां कोई भी पल्याण बिन्दु नहीं है। अतः सविकल्प युक्तियां इस प्रकार ज्ञात की जाती हैं :

B

$$A\ \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 7/15 & 8/15 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \\ 11/15 \\ 4/15 \\ \\ \end{array}$$

और $V = (-2)\left(\frac{11}{15}\right) + (-9)\left(\frac{4}{15}\right) \doteq -\frac{58}{15} = -3.87$

उप-खेल (iii) :

B

$$A\ \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{-6} & -2 \\ -7 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

यहां एक पल्याण बिन्दु है और खेल का मान -6 है।

उप-खेल (iv) :

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} -3 & \boxed{-4} \\ \boxed{2} & -9 \end{bmatrix} \end{array}$$

यहां एक पल्याण बिन्दु है और खेल का मान -4 है।

उप-खेल (v) : इसमें कोई भी पल्याण बिन्दु नहीं है और सविकल्प युक्तियां इस प्रकार ज्ञात की जाती हैं :

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & & B_1 & B_2 & \\ A & \begin{array}{c} A_2 \\ A_4 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}} & \begin{array}{c} 6/17 \\ 1/17 \end{array} \\ & & 3/7 & 4/7 & \end{array}$$

और $V = (-4)\left(\frac{6}{7}\right) + (-1)\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{25}{7} \simeq -3.57$

उप-खेल (vi) : इसमें कोई भी पल्याण बिन्दु नहीं है और सविकल्प युक्तियां इस प्रकार ज्ञात की जाती हैं :

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & & B_1 & B_2 & \\ A & \begin{array}{c} A_3 \\ A_4 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}} & \begin{array}{c} 6/17 \\ 11/17 \end{array} \\ & & 8/17 & 9/17 & \end{array}$$

और $V = (-9)\left(\frac{6}{17}\right) + (-1)\left(\frac{11}{17}\right) = -\frac{65}{17} \simeq -3.82$

यदि हम सभी द्वै उप-खेल के मानों को देखें, तो हम पाएंगे कि ये सभी मान ऋणात्मक है अर्थात् सभी द्वै उप-खेलों में खिलाड़ी B जीतता है और खिलाड़ी A हारता है। अतः खिलाड़ी A सुरक्षित खेल खेलना चाहेगा। इसलिए वह उस उप-खेल को खेलना चाहेगा जिससे उसे सभी द्वै मानों -3.6, -3.87, -6, -4, -3.57 और -3.82 में से अधिकतम मान उसे प्राप्त हो। अतः खिलाड़ी A, उप-खेल (v) खेलेगा जिसका मान -3.57 है और A और B की युक्तियां ये होंगी :

$$\left(0,\ \frac{6}{7},\ 0,\ \frac{1}{7}\right) \text{ और } \left(\frac{3}{7},\ \frac{4}{7}\right)$$

प्रश्न 3 : निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाला खेल हल कीजिए।

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी } Y \\ \text{खिलाड़ी } X & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

14.5 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की है

1) वह खेल जिसमें कोई पल्याण बिन्दु नहीं है और इस तरह सविकल्प युक्तियों वाला खेल।

2) सविकल्प युक्तियों और प्रत्याशित मान को परिभाषित किया है।

3) सविकल्प युक्तियों वाले खेल को बीजीय विधि से हल किया है।

14.6 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

E1) क) खिलाड़ी A और खिलाड़ी B की युक्तियों $\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right)$ और $\left(\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$ हैं।

खेल का मान $= -\frac{65}{17}$

ख) खिलाड़ी A और खिलाड़ी B की युक्तियों $\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right)$ और $\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$ हैं और $v = -25/7$.

E2) खिलाड़ी A और खिलाड़ी B की युक्तियों $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ और $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ हैं और $V = 9$.

E3) खिलाड़ी A की युक्ति (0, 1) है। खिलाड़ी B की युक्तियां (1, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ हैं। खेल का मान $V = 1$.

14.7 शब्दावली (Glossary)

उप-खेल	Sub-Game
प्रत्याशित मान	Expected Value
प्रायिकता	Probability

इकाई 15 ग्राफीय विधि और प्रमुखता (Graphical Method and Dominance)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

15.1 प्रस्तावना (Introduction)
उद्देश्य (Objectives)

15.2 $2 \times n$ खेल का ग्राफीय हल (Graphical Solution of $2 \times n$ Game)

15.3 $m \times 2$ खेल का ग्राफीय हल (Graphical Solution of $m \times 2$ Game)

15.4 प्रमुखता गुणधर्म (Dominance Property)

15.5 आपरिवर्तित प्रमुखता गुणधर्म (Modified Dominance Property)

15.6 सारांश (Summary)

15.7 उत्तर/संकेत/हल (Answers/Hints/Solutions)

15.8 शब्दावली (Glossary)

15.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 13 में आप यह पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार **अविकल्पी युक्तियों** (Pure Strategies) वाले खेल को हल किया जाता है अर्थात् उस खेल को किस प्रकार हल किया जाता है जिसका भुगतान आव्यूह आयताकार है और जिसकी कोटि $m \times n$ है, जबकि उसमें एक **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) हो। परन्तु, यदि खेल में कोई पल्याण बिन्दु न हो और भुगतान आव्यूह, 2×2 की कोटि हो, तो इसे इकाई 14 में बतायी गई विधि से हल किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, **सविकल्प युक्तियों** (Mixed Strategies) वाले खेल को तब हल किया जा सकता है जबकि यह 2×2 की कोटि की हो।

$m \times 2$ या $2 \times n$ की कोटि के भुगतान आव्यूहों वाले खेल को ग्राफीय विधि से आसानी से हल किया जा सकता है। ग्राफीय लघु-विधि से $m \times 2$ या $2 \times n$ की कोटि वाले खेल के मूल साइज को 2×2 की कोटि की सरल साइज में बदला जा सकता है और तब इसके बाद इसे बीजीय विधि या लघु-विधि (इकाई 14) से हल किया जा सकता है।

कभी-कभी खिलाड़ी यह देखता है कि उसकी एक अविकल्पी युक्ति सदा ही शेष अविकल्पी युक्तियों से निम्न होती है अतः वह पूरे खेल में निम्न युक्ति से ही खेलना चाहेंगे। ऐसी स्थितियों में, खेल से निम्न युक्ति को हटाकर खेल की साइज को कम किया जा सकता है। इसलिए, इस इकाई में हम खेल की साइज को काफी कम करने की तकनीक पर विचार करेंगे। और, जब इसकी साइज घटकर 2×2 की कोटि की हो जाती है तब हम इसे इकाई 13 और इकाई 14 में बताई गई विधियों से इसे आसानी से हल कर सकते हैं।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- $2 \times n$ की कोटि वाले खेल को 2×2 की कोटि वाले सरल खेल में बदल सकेंगे;
- $m \times 2$ की कोटि वाले खेल को 2×2 की कोटि वाले सरल खेल में बदल सकेंगे;
- खेल की साइज को कम करने के लिए प्रमुखता गुणधर्म को लागू कर सकेंगे;
- खेल की साइज को कम करके 2×2 की साइज का बना करके खेल का मान मालूम कर सकेंगे।

15.2 $2 \times n$ खेल का ग्राफीय हल (Graphical Solution of $2 \times n$ Game)

इकाई 13 तथा 14 से संबंध रखने वाला सिद्धांत 2×2 भुगतान आव्यूह (मैट्रिक्स) के साथ किसी भी खेल के लिए समान्यतया लागू होगा। पर, यदि भुगतान आव्यूह उच्च कोटि (मानलीजिए $m \times n$) वाला हो, तो हम **प्रमुखता नियम** (Principle of Dominance) से भुगतान आव्यूह की साइज को (यदि संभव हो) कम करते हैं और यदि भुगतान आव्यूह $2 \times n$ या $m \times 2$ की कोटि वाला है तो हम ग्राफीय विधि से भुगतान आव्यूह की साइज को घटाकर 2×2 की साइज का करते हैं जिससे कि खेल का हल मालूम करने के लिए इकाई 13 और इकाई 14 में बतायी गई विधियों को लागू किया जा सके।

इस भाग में हम ग्राफीय विधि से $2 \times n$ या $m \times 2$ भुगतान आव्यूह की साइज को 2×2 की साइज के करने की विधि पर चर्चा करेंगे। इसके लिए यहां हम एक उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 1 : ग्राफीय विधि से कोटि $2 \times n$ वाले खेल को हल कीजिए जिसका भुगतान आव्यूह यह है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ & & & \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : क्योंकि दिए हुए आव्यूह में ऐसा कोई मान नहीं है जो अपनी पंक्ति में सबसे छोटा हो और अपने स्तंभ में सबसे बड़ा हो। अत: इस खेल में कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। इसलिए खिलाड़ी को **सविकल्प युक्तियां** (Mixed Strategies) अपनानी होगा। मानलीजिए खिलाड़ी A_1 प्रायिकता p से युक्ति A_1 खेलता है। और इसलिए वह प्रायिकता $(1 - p)$ से युक्ति A_2 खेलेगा, क्योंकि दो युक्तियों की प्रायिकताओं का जोड़ 1 होना चाहिए।

अब हम खिलाड़ी B की अविकल्पी युक्ति के विरुद्ध अर्थात् खिलाड़ी B की युक्तियों B_1, B_2, B_3, या B_4 के विरुद्ध खिलाड़ी A के प्रत्याशित भुगतान इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

B की युक्ति	A का प्रत्याशित भुगतान
B_1	$E_1(p) = 2p + 1(1 - p) = p + 1$
B_2	$E_2(p) = 1p + 0(1 - p) = p$
B_3	$E_3(p) = 0p + 3(1 - p) = -3p + 3$
B_4	$E_4(p) = -2p + 2(1 - p) = -4p + 2$

अब, हम p के विरुद्ध E_1, E_2, E_3, E_4 के ग्राफ खींचते हैं। इसके लिए हम इकाई दूरी पर दो ऊर्ध्वाधर समांतर रेखाएं खींचते हैं और इनमें से प्रत्येक पर एक मापक्रम का चिह्न बना देते हैं। दो रेखाएं A_1 और A_2 क्रमश : A की युक्तियों A_1 और A_2 को निरूपित करती हैं और इन रेखाओं के बीच की दूरी 1 इसलिए ली गई है क्योंकि प्रायिकता का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता। B की प्रत्येक युक्तियों को निरूपित करने के लिए हम रेखाएं खींचते हैं। अब $E_1(p) = p + 1$ का ग्राफ खींचने के लिए हम p का मान 0 लेते हैं जिससे कि A_2 की प्रायिकता = 1 और $E_1 0 = 1$ जो कि A_2–अक्ष पर बिन्दु 1 के संगत होता है। और जब p = 1, तब A_2 की प्रायिकता = (1 – 1) = 0 और हम $E_1(1) - 2$ का मान ज्ञात करते हैं जो A_1-अक्ष पर बिन्दु 2 के संगत होता है। इन दो बिन्दुओं को मिलाने पर हमें $E_1(p)$ का ग्राफ प्राप्त हो जाता है। इसी प्रकार हम E_2, E_3 और E_4 के ग्राफ खींच सकते हैं।

यहां यह देखा जा सकता है कि A के अपेक्षित भुगतान विभिन्न मानों E_1, E_2, E_3, E_4 के लिए A_1 और A_2 रेखाओं के बिन्दु क्रमशः युक्तियों B_1, B_2, B_3 और B_4 के लिए भुगतान आव्यूह (मैट्रिक्स) में मानों के क्रमानुसार हैं।

इस तरह, E_1, E_2, E_3 आदि के ग्राफ खींचने के लिए हम केवल B की विभिन्न युक्तियों के भुगतान आव्यूह के मान लेते हैं।

इस तरह B की पहली युक्ति B_1 को निरूपित करने के लिए हम किसी A_2 युक्ति B_1 के भुगतान आव्यूह में दिया गया है। पर A_1 को मिलाते हैं। यह रेखा खिलाड़ी A के प्रत्याशित

भुगतान $E_1(p)$ को निरूपित करेगी जहां p को x–अक्ष और E(p) को y–अक्ष माना गया है। इसी प्रकार हम B की युक्तियों B_2, B_3 और B_4 की रेखाएं खींचते हैं जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है।

अव, **सविकल्प युक्ति खेलों** (Mixed Strategy Games) के महाल्पिष्ठ निकष के अनुसार खिलाड़ी A को p के मान का चयन इस प्रकार करना चाहिए कि उसे इस न्यूनतम प्रत्याशित भुगतानों से अधिकतम प्राप्त हो सके। रेखाओं E_1, E_2, E_3, और E_4 की **निम्न परिसीमा** (Lower Boundary) अर्थात् **निम्न अन्वालोप** (Lower Envelope) ने **न्यूनतम प्रत्याशित भुगतान** (Minimum Expected Pay–off) प्राप्त होगा और तब इस निम्न अन्वालोप के उच्चतम बिन्दु से न्यूनतम प्रत्याशित भुगतान का अधिकतम प्राप्त हो जाएगा। चित्र 1 में निम्न अन्वालोप की मोटी रेखा PHK से दिखाया गया है। जहां उच्चतम बिन्दु H से न्यूनतम भुगतान का अधिकतम प्राप्त होता है। बिन्दु H, रेखाओं $E_2(p)$ और $E_4(p)$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है जो कि निम्नलिखित आव्यूह के संगत है :

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस तरह हमने खेल की साइज को 2×4 से घटाकर 2×2 कर दिया है। और, अब खेल को लघु–विधि से हल किया जा सकता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

चरण I : भुगतानों को घटाने पर

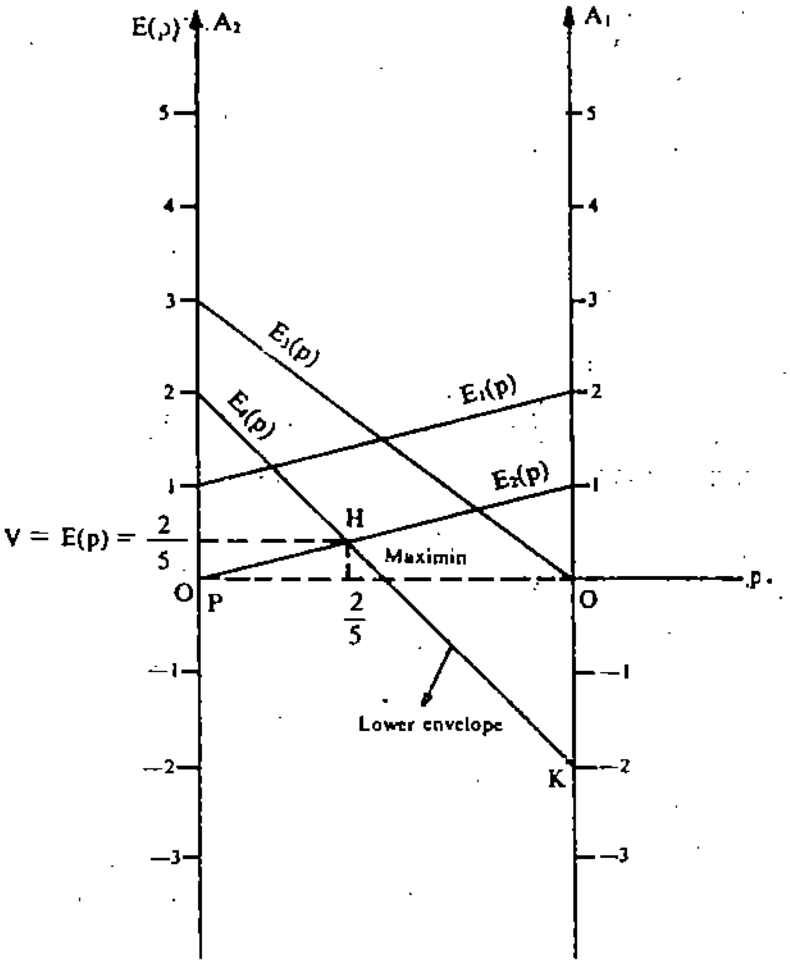
$$\begin{array}{ccl} & B & \\ & \begin{array}{cc} B_2 & B_4 \end{array} & \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1-(-2) = 3 \\ 2-0 = 2 \end{array} \end{array}$$

$$1-0 = \phi - 1 = 2-(-2) = 4$$

चरण II: युग्मों (Pairs) का अदला-बदली करने पर

$$\begin{array}{ccl} & B & \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array} & \end{array}$$

चरण III : इनके योग पर युग्मों को रखने पर


E(p)
A₂
A₁
E₃(p)
E₁(p)
E₄(p)
E₂(p)
H
V = E(p) = 2/5
Maximin
O
P
2/5
O
p
Lower envelope
K
5
4
3
2
1
−1
−2
−3

चित्र 1

$$
\begin{array}{ccc}
 & & B \\
 & & \begin{array}{cc} B_2 & B_4 \end{array} \\
A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2/5 \\ 3/5 \end{array} \\
 & & \begin{array}{cc} 4/5 & 1/5 \end{array}
\end{array}
$$

चरण IV : खेल का मान $V = 1\left(\frac{2}{5}\right) + 0\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}$

E_2 और E_4 के दो मानों को बराबर करके भी इसे सीधे हल किया जा सकता है, क्योंकि बिन्दु 11 रेखाओं E_2 और E_4 का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

$$E_2(p) = E_4(p) \Rightarrow p = -4p + 2$$

$$\Rightarrow 5p = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{5} \text{ और } 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

अतः खेल का मान $V = 1.\frac{2}{5} + 0.\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

B_2 की प्रायिकता को q मानकर और इस तरह B_4 की प्रायिकता को $(1 - q)$ मानकर तथा खिलाड़ी B के अधिकतम प्रत्याशित भुगतान का न्यूनतम ज्ञात करके खिलाड़ी B की युक्तियों B_2 और B_4 को प्राप्त किया जा सकता है। अतः यदि खिलाड़ी A युक्ति A_1 का चयन करता है और पूरे खेल में इससे खेलता है, तो खिलाड़ी B का प्रत्याशित भुगतान यह होगा

$$1.q + (-2) . (1 - q)$$

और, इसी प्रकार यदि खिलाड़ी A युक्ति A_2 का चयन करता है और पूरे खेल में इससे खेलता है, तो खिलाड़ी B का प्रत्याशित भुगतान यह होगा

$$0.q + 2(1 - q)$$

दो भुगतानों को बराबर करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$q - 2(1 - q) = 2(1 - q)$$

$$\Rightarrow 5q = 4 \Rightarrow q = \frac{4}{5} \text{ और } 1 - q = \frac{1}{5}$$

अतः B की युक्तियां ये होती हैं

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

और A की युक्तियां ये होती हैं

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

खेल का मान $= \frac{2}{5}$

p के मान और खेल के मान को भी ग्राफ से सीधे प्राप्त किया जा सकता है। ये हैं : p = 4 और $v = \frac{2}{5}$, जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है।

उदाहरण 2 :ग्राफीय विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए और खेल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{c} \\ \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : इस खेल में कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। हम ग्राफीय विधि से खेल की साइज को कम करेंगे।

यदि p_1 और p_2 दो प्रायिकताएँ हों, जिनसे खिलाड़ी A अपनी अविकल्पी युक्तियों का प्रयोग करता है, तो $p_1 + p_2 = 1$ और $p_1, p_2 \geq 0$.

खिलाड़ी B की अलग-अलग अविकल्पी युक्तियों के लिए खिलाड़ी A का प्रत्याशित भुगतान यह होता है :

B की अविकल्पी युक्ति	A का प्रत्याशित भुगतान
B_1	$E_1(p_1) = 2p_1 + 4p_2 = 2p_1 + 4(1 - p_1) = -2p_1 + 4$
B_2	$E_2(p_1) = 2p_1 + 3(1 - p_1) = -p_1 + 3$
B_3	$E_3(p_1) = 3p_1 + 2(1 - p_1) = p_1 + 2$
B_4	$E_4(p_1) = -p_1 + 6(1 - p_1) = -7p_1 + 6$

मापक्रम A_1 और मापक्रम A_2 पर बिन्दुओं को मिलाकर चार भुगतानों E_1, E_2, E_3 और E_4 को सामान्य ढंग से आलेखित किया जाता है जैसा कि चित्र 2 में दिखाया गया है।

आप यहां यह देख सकते हैं कि उच्चतम बिन्दु H अर्थात् महात्पिष्ठ (Maximin) 1, $(x_1 + 2, -7x_1 + 6)$ के अधिकतम को प्रकट करता है जहां $E_3(x_1) = x_1 + 2$ और $E_4(x) = -x + 6$ बिन्दु H. $x_1 + 2$ और $-7x + 6$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है और $x_1 = Y_2$ पर सामान्य मान 5/2 है।

इसलिए, खिलाड़ी की इष्टतम युक्ति (Optimal Strategy) $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ होती है। रेखाएं $x_1 + 2$ और $-7x_1 + 6$ दिए हुए आव्यूह के तीसरे और चौथे स्तंभ की संगत रेखाएं हैं। 2 × 2 खेल का सहचारी आव्यूह यह है :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

लघु-विधि से खिलाड़ी B की इष्टतम युक्ति यह होती है :

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 1 : ग्राफीय विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए और खेल का मान ज्ञात कीजिए :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 25 & 45 & 40 \\ 10 & 60 & 30 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

प्रश्न 2 : ग्राफीय विधि से X के लिए निम्नलिखित 2×5 खेल के भुगतानों की इष्टतम युक्तियां ज्ञात कीजिए और खेल का मान मालूम कीजिए :

Y

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

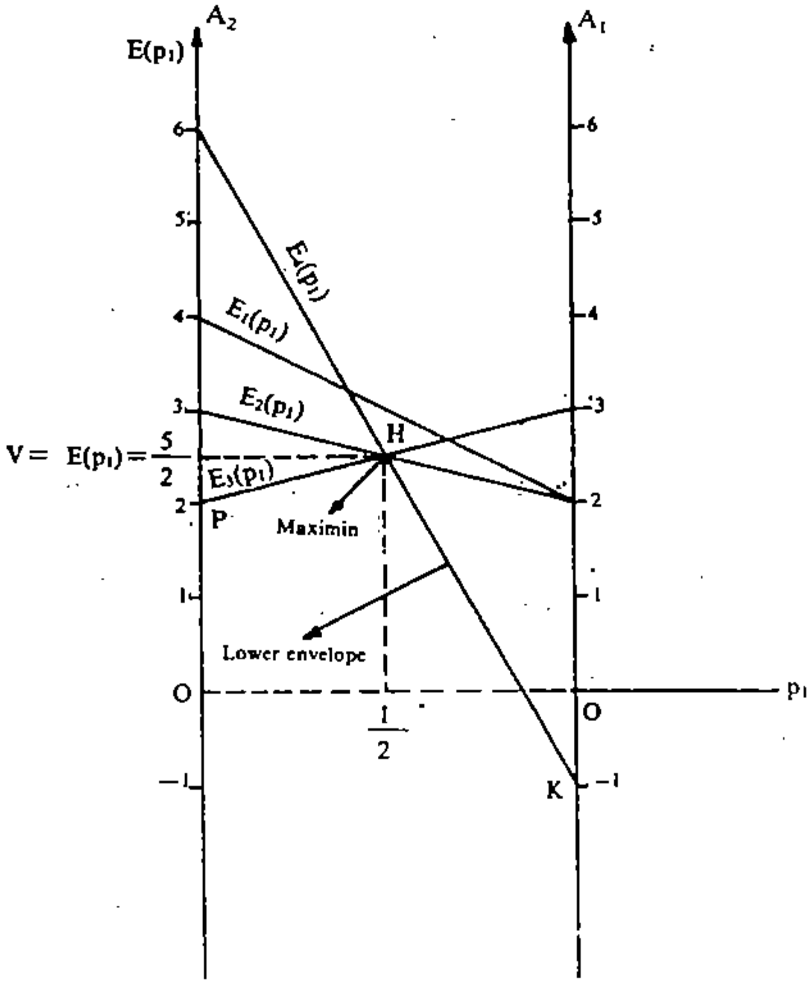
15.3 $m \times 2$ खेल का ग्राफीय हल (Graphical Solution of $m \times 2$ Game)

हम भाग 15.2 में $2 \times n$ की कोटि वाले खेल की साइज को 2×2 की कोटि वाले खेल में बदलने की ग्राफीय विधि पर चर्चा कर चुके हैं। $m \times 2$ की कोटि वाले खेलों का अध्ययन भी इसी तरह किया जाता है जिस तरह $2 \times n$ की कोटि वाले खेलों का किया जाता है। $2 \times n$ की कोटि वाले खेलों के संबंध में हमने B की अलग-अलग युक्तियों के लिए A के प्रत्याशित भुगतान ज्ञात करते हैं जबकि $m \times 2$ की कोटि वाले खेल के संबंध में खिलाड़ी की किसी भी अविकल्पी युक्ति अर्थात् विभिन्न युक्तियों A_1, A_2, A_3 आदि के लिए खिलाड़ी B के प्रत्याशित भुगतान ज्ञात करते हैं। इस संबंध में हम निम्नलिखित उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 3 : एक 4×2 की कोटि वाले खेल ($m \times 2$ की कोटि वाले खेल की विशिष्ट स्थिति) को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

B

$$A \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$


A2
E(p1)
A1
6
5
4
3
2
1
O
-1
E4(p1)
E1(p1)
E2(p1)
E3(p1)
H
P
K
V = E(p1) = 5/2
Maximin
Lower envelope
1/2
p1

चित्र 2

हल : क्योंकि इस खेल में कोई पल्याण विन्दु नहीं है, इसलिए खिलाड़ी B सविकल्प युक्तियों (Mixed Strategies) से खेलेगा। मानलीजिए खिलाड़ी B प्रायिकता q से युक्ति B_1 को खेलता है। इसलिए वह प्रायिकता $(1-q)$ से युक्ति B_2 को खेलेगा।

अब, खिलाड़ी A की किसी भी अविकल्पी युक्ति, अर्थात् खिलाड़ी A को अविकल्पी युक्तियों A_1, A_2, A_3, A_4 में से किसी भी एक युक्ति के लिए खिलाड़ी B का प्रत्याशित भुगतान यह होगा :

A की युक्ति	B का प्रत्याशित भुगतान
A_1	$E_1(q) = 2q + 1(1-q) = q + 1$
A_2	$E_2(q) = 1.q + 0(1-q) = q$
A_3	$E_3(q) = 0.q + 3(1-q) = 3 - 3q$
A_4	$E_4(q) = -2.q + 2(1-q) = -4q + 2$

अब हम q के विरुद्ध $E_1(q)$, $E_2(q)$, $E_3(q)$ और $E_4(q)$ के ग्राफ आलेखित करेंगे।

2×4 की कोटि वाले खेल की तरह इकाई दूरी पर हम B_1 और B_2 नामक दो अर्ध्वाधर समांतर रेखाएं खींचते हैं और q के विरुद्ध E_1, E_2, E_3 और E_4 के ग्राफ खींचते हैं। जैसा कि p के विरुद्ध $E_1(p)$, $E_2(p)$ आदि वाली स्थिति में खींचा गया है।

अब, सविकल्प युक्तियों के लिए खिलाड़ी B को **अल्पमहिष्ठ नियम** (Minimax Principle) लागू करना चाहिए और q के मान का चयन इस तरह करना चाहिए कि अधिकतम प्रत्याशित भुगतानों का न्यूनतम उसे प्राप्त हो। रेखाओं E_1, E_2, E_3 और E_4 की **उपरि परिसीमा** (Upper Boundary) अर्थात् **उपरि अन्वालोप** (Upper Envelope) से अधिकतम प्रत्याशित भुगतान प्राप्त होंगे और तब इस उपरि अन्वालोप के न्यूनतम मान से अधिकतम प्रत्याशित भुगतानों के न्यूनतम मान प्राप्त होंगे। चित्र 3 में, उपरि अन्वालोप को मोटी रेखा KLM से दिखाया गया है और निम्नतम बिन्दु L (जो E_1 और E_3 का प्रतिच्छेद बिन्दु है) से B के अधिकतम भुगतानों का न्यूनतम मान प्राप्त होता है। यहां बिन्दु L निम्नलिखित आव्यूह के संगत होता है :

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस तरह हमने खेल की साइज को 4×2 की कोटि से घटाकर 2×2 की कोटि वाला कर दिया है। और अब लघु-विधि (Short Cut Method) से इस खेल को हल किया जा सकता है। खिलाड़ी B और खिलाड़ी की सविकल्प युक्तियां ये होती हैं :

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ और } S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $V = 0.\frac{2}{4} + 3.\frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

उदाहरण 4 : ग्राफीय विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए :

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : इस खेल में कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। अत: हम ग्राफीय विधि से खेल की साइज को कम करेंगे।

मान लीजिए खिलाड़ी B प्रयिकताओं q और (1 – q) से अपनी अविकल्पी युक्तियों B_1 और B_2 का प्रयोग करता है, क्योंकि दो प्रायिकताओं का जोड़ 1 के बराबर होता है और $q \geq 0$.

A की युक्तियों को इकाई दूरी पर स्थित दो मापक्रमों B_1 और B_2 पर रखने पर हमें यह प्राप्त होता है :

चित्र में, खिलाड़ी B के प्रत्याशित भुगतानों के **अल्पमहिष्ठ मानों** (Minimax Values) के दो बिन्दु H और K हैं। इस तरह, यह खेल 2×2 की कोटि वाले निम्नलिखित खेलों में बदल जाता है :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad ...(1)$$

और

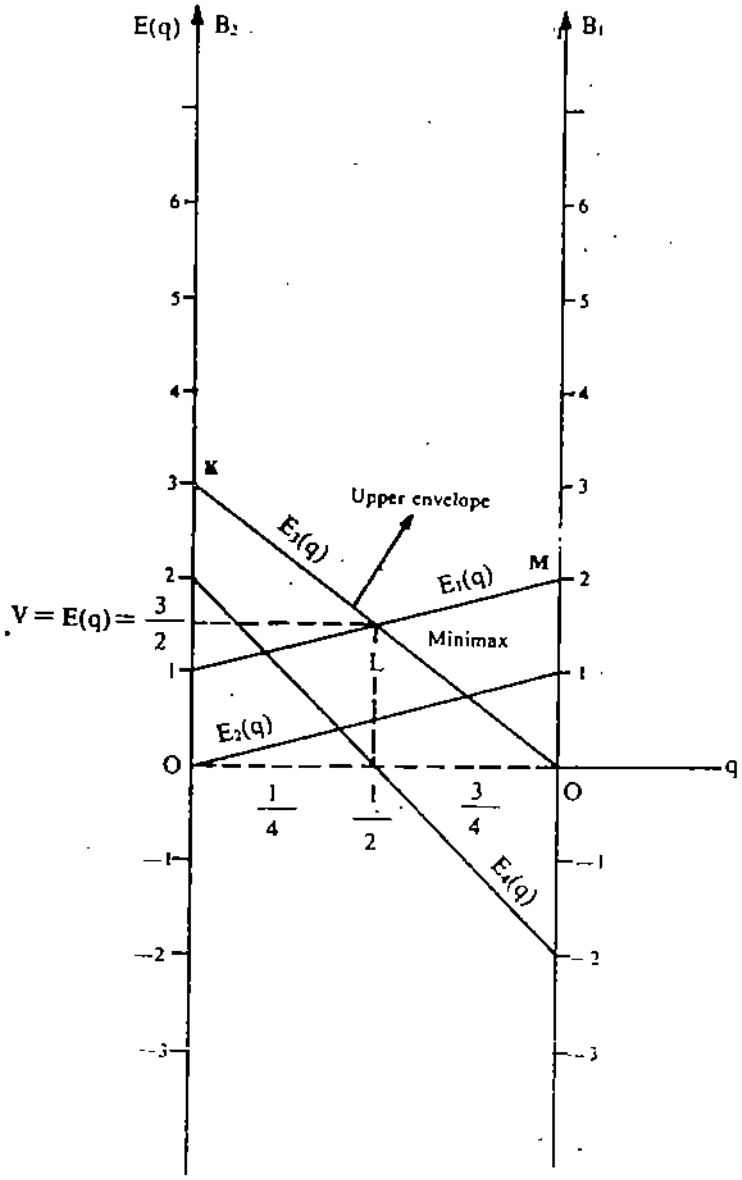
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad ...(2)$$

लघु-विधि से खेलों (1) और (2) को हल करने पर हमें खेल (1) के लिए निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \text{ और } V = 2$$

खेल 2 के लिए

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ और } V = 2$$


E(q)
B₂
B₁
6
5
4
3
2
1
O
−1
−2
−3
K
M
L
Upper envelope
E₃(q)
E₁(q)
E₂(q)
E₄(q)
Minimax
V = E(q) = 3/2
1/4
1/2
3/4
q
O

प्रश्न 3 : ग्राफीय विधि से दो व्यक्तियों से संबंधित निम्नलिखित भुगतान आव्यूह से इष्टतम युक्तियां और खेल का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4 : ग्राफीय विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए :

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी B} \\ \text{खिलाड़ी A} & \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 3 \\ 0 & -2 \\ -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

15.4 प्रमुखता गुणधर्म (Dominance Property)

हमने यह देखा है कि $m \times n$ की कोटि के खेल को, जबकि m या n = 2 और इसमें पल्याण बिन्दु न हो, तो ग्राफीय विधि से खेल की साइज को 2×2 की कोटि का करके हल किया जा सकता है। कभी-कभी बड़ी साइज वाले भुगतान आव्यूह को भी, जिसमें पल्याण बिन्दु हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है, प्रमुखता नियम लागू करके छोटा किया जा सकता है, जहां छोटी साइज का भुगतान आव्यूह प्राप्त करने से पहले कुछ पंक्तियों और/या स्तंभों का सावधानी से हटा दिया जाता है जिससे कि ऊपर बतायी गई विधियों से दो खिलाड़ियों की इष्टतम युक्तियां प्राप्त किया जा सके। प्रमुखता नियम विशेष रूप से द्वितीय व्यक्ति शून्य योग खेल के, जिसमें पल्याण बिन्दु नहीं होता, मूल्यांकन में उपयोगी होता है।

आइए हम द्वितीय व्यक्ति शून्य योग खेल का निम्नलिखित भुगतान आव्यूह लें :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{B} \\ & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{... (i)}$$

इस भुगतान आव्यूह में हम यह पाते हैं कि युक्ति A_3 की तीसरी पंक्ति का प्रत्येक अवयव A की युक्ति A_1 की पहली पंक्ति के संगत अवयव से बड़ा होता है। परिणाम यह होता है कि खिलाड़ी A अपनी युक्ति A_3की तुलना में अपनी युक्ति A_1 खेलना चाहेगा, क्योंकि युक्ति A_3 को खेलने में उसे अधिक लाभ होने की संभावना होती है। इसलिए उसकी युक्ति A_1 युक्ति A_3 से निम्न होती है और इसे प्रत्येक प्रारंभ में ही हटाया जा सकता है। और खेल की साइज को कम किया जा सकता है।

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{... (ii)}$$

इसी प्रकार, यदि हम ऊपर दिए गए भुगतान आव्यूह (ii) लें, तो हम पाएंगे कि स्तंभ I का प्रत्येक अवयव स्तंभ II के संगत अवयव से बड़ा होता है। अत: (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) खिलाड़ी B स्तंभ I को खेलना नहीं चाहेगा अर्थात् अपनी द्वितीय युक्ति B_2 की तुलना में अपनी पहली युक्ति B_1 को खेलना नहीं चाहेगा क्योंकि B_1 को खेलने में उसे अधिक हानि होने की संभावना होती है। इस तरह, भुगतान आव्यूह (ii) में युक्ति B_1, युक्ति B_2 से निम्न होती है। अत: युक्ति B_1 को हटाया जा सकता है और खेल निम्न साइज का हो जाता है :

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस तरह कभी-कभी खिलाड़ी की अविकल्पी युक्तियों में से एक युक्ति सदा ही शेष अविकल्पी युक्तियों को कम से कम एक युक्ति से निम्न होती हैं। अत: अपनी शेष उच्च युक्तियों की तुलना में पूरे खेल में वह अपनी निम्न युक्ति को वह खेलना नहीं चाहता। इस तरह, निम्न युक्ति पर शेष उच्च युक्तियों की प्रमुखता होती है। ऐसी स्थितियों में निम्न युक्तियों से संबंद्ध पंक्ति या स्तंभ को हटाकर भुगतान आव्यूह की साइज को काफी कम कर दिया जाता है। **प्रमुखता (Dominance) के सामान्य नियम यह हैं :**

1. यदि एक भुगतान आव्यूह की एक पंक्ति (मान लीजिए iवीं पंक्ति) के सभी अवयव एक अन्य पंक्ति (मान लीजिए jवीं पंक्ति) के संगत अवयवों से कम या बराबर हो, तो खिलाड़ी A (अधिकतमकारी खिलाड़ी) iवीं युक्ति को कभी भी अपनाना नहीं चाहेगा। दूसरे शब्दों में iवीं युक्ति पर jवीं युक्ति की प्रमुखता होती है।

   ऊपर दिए गए भुगतान आव्यूह (i) में खिलाड़ी A (अधिकतमकारी खिलाड़ी) की पहली युक्ति के अवयव उसकी तीसरी युक्ति के संगत अवयव से छोटे थे। अत: उसकी पहली युक्ति पर उसकी तीसरी युक्ति की प्रमुखता थी। इसलिए उसे हटा दिया गया था।

2. यदि भुगतान आव्यूह के एक स्तंभ (मान लीजिए rवें स्तंभ) के सभी अवयव एक दूसरे स्तंभ (मान लीजिए sवें स्तंभ) के संगत अवयवों से बड़े या बराबर हो तो खिलाड़ी B (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) कभी भी rवीं युक्ति को नहीं अपनाएगा। दूसरे शब्दों में rवीं युक्ति पर sवीं युक्ति की प्रमुखता होती है।

   ऊपर दिए गए भुगतान आव्यूह (ii) में स्तंभ I के सभी अवयव स्तंभ II के संगत अवयवों से बड़े थे। अत: खिलाड़ी B (न्यूनतमकारी खिलाड़ी) अपनी पहली युक्ति B_1 खेलना नहीं चाहता था। दूसरे शब्दों में, खिलाड़ी B की पहली युक्ति पर दूसरी युक्ति की प्रमुखता थी। इसलिए इसे हटा दिया गया था।

प्रमुखता-नियम को निम्नलिखित उदाहरणों में प्रदर्शित किया गया है :

उदाहरण 5 : आइए हम निम्नलिखित खेल लें और प्रमुखता-नियम लागू करके भुगतान आव्यूह को छोटा करें।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : (A_3, B_2) पर इस खेल का एक पल्याण बिन्दु है और खेल का मान 7 है। प्रमुखता नियम लागू करके हम भुगतान आव्यूह को छोटा करेंगे। यदि हम दिए हुए भुगतान आव्यूह के स्तंभों को देखें तो हम पाएंगे कि चौथे स्तंभ के अवयव पहले स्तंभ के संगत अवयवों से बड़ा या बराबर है और पांचवें स्तंभ के अवयव दूसरे स्तंभ के संगत अवयवों से बड़ा या बराबर है। अत: प्रमुखता-नियम को लागू करके चौथे स्तंभ और पांचवें स्तंभ को, जो कि निम्न युक्तिया हैं, हटाया जा सकता है। तब भुगतान आव्यूह यह हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

और, यहां हम देखते हैं कि पहली, दूसरी और चौथी पंक्तियों के अवयव तीसरी पंक्ति के संगत अवयव से छोटे हैं। अत: तीसरी पंक्ति की अन्य तीन पंक्तियों पर प्रमुखता होती है। इसलिए पहली, दूसरी और चौथी पंक्ति को हटा दिया जाता है।

भुगतान आव्यूह यह हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

और, पहले स्तंभ और तीसरे स्तंभ के अवयव दूसरे स्तंभ के अवयव से बड़े हैं। अत: दूसरे स्तंभ की पहले और तीसरे पर प्रमुखता होती है। इसलिए पहले और तीसरे स्तंभ को हटा दिया जाता है और हमारे पास निम्नलिखित आव्यूह बचा रहता है

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} B_2 \\ [\,7\,] \end{array}$$

अतः खेल का हल यह होता है :

i) खिलाड़ी A को युक्ति A_3 से खेलना चाहिए,

ii) खिलाड़ी B को युक्ति B_2 से खेलना चाहिए, और

iii) खेल का मान 7 है।

इस उदाहरण में हमने यह देखा है कि आव्यूह, 1×1 की कोटि वाले आव्यूह में बदल जाता है, जो कि पल्याण बिन्दु के संगत होता है। इस तरह, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि जब कभी भुगतान आव्यूह छोटा होकर 1×1 की कोटि वाला आव्यूह हो जाता हो। तब हमें एक पल्याण बिन्दु अवश्य प्राप्त होगा। यही कारण है कि पहले हम पल्याण बिन्दु को ढूंढ़ते हैं।

उदाहरण 6 : दो फर्मों A और B के लिए निम्नलिखित भुगतान आव्यूह दिया गया है। प्रमुखता गुणधर्म की सहायता से दोनों फर्मों की सर्वोत्तम सविकल्प युक्तियां ज्ञात कीजिए और खेल का मान मालूम कीजिए।

$$\text{फर्म A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \overset{\text{फर्म B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 50 & 40 \\ 70 & 70 & 50 \\ 80 & 60 & 75 \end{bmatrix} \end{array}}$$

हल : दिए हुए खेल का कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। यदि हम भुगतान आव्यूह के स्तंभों को देखें तो हम पाएंगे कि पहले स्तंभ के अवयव दूसरे स्तंभ के संगत अवयवों से बड़े या बराबर हैं। अतः पहले स्तंभ पर दूसरे स्तंभ की प्रमुखता होती है और हमारे पास निम्नलिखित आव्यूह बचा रहता है :

$$\text{फर्म A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \overset{\text{फर्म B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 70 & 50 \\ 60 & 75 \end{bmatrix} \end{array}}$$

और, क्योंकि पहली पंक्ति के अवयव दूसरी और तीसरी पंक्तियों के संगत अवयवों से छोटे हैं, इसलिए आव्यूह से पहली पंक्ति को हटा दिया जाता है और हमारे पास 2×2 की कोटि वाला आव्यूह बचा रहता है जैसा कि नीचे दिया गया है :

$$\text{फर्म A} \quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \overset{\text{फर्म B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ 60 & 75 \end{bmatrix} \end{array}}$$

अब, लघु-विधि से खेल को हल किया जा सकता है।

चरण I : भुगतान को घटाने पर

$$\begin{array}{cc} & \text{फर्म } B \\ & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{फर्म } A \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ 60 & 75 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 70 - 50 = 20 \\ 75 - 60 = 15 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 70 - 60 = 10 & 75 - 50 = 25 \end{array} \end{array}$$

चरण II : युग्मों का अदला-बदली करने, युग्मों को उनके योगफलों पर रखने और सरल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{cc} & \text{फर्म } B \\ & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{फर्म } A \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ 60 & 75 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dfrac{15}{15 + 20} = \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{20}{15 + 20} = \dfrac{4}{7} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \dfrac{25}{10 + 25} & \dfrac{10}{10 + 25} \\ = \dfrac{5}{7} & = \dfrac{2}{7}. \end{array} \end{array}$$

अत: फर्म A और फर्म B की इष्टतम सविकल्प युक्तियां ये होती हैं :

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $V = 50 \times \frac{3}{7} + 75 \times \frac{4}{7} = \frac{450}{7}.$

प्रश्न 5 : प्रमुखता गुणधर्म की सहायता से निम्नलिखित खेलों को हल कीजिए :

क)

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी } B \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{खिलाड़ी } A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख)

$$\begin{array}{cc} & \text{फर्म } B \\ & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B & B_3 \end{array} \\ \text{फर्म } A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 35 & 65 & 25 & 5 \\ 30 & 20 & 15 & 0 \\ 40 & 50 & 0 & 10 \\ 55 & 60 & 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

15.5 आपरिवर्तित प्रमुखता गुणधर्म (Modified Dominance)

भाग 15.4 में प्रमुखता गुणधर्म को लागू करने से संबंधित सामान्य नियमों को बताया गया है जहां अविकल्पी युक्ति (Pure Strategy) एक अन्य अविकल्पी युक्ति से निम्न थी। लेकिन, प्रमुखता गुणधर्म केवल आविकल्पी युक्तियों की निम्नता पर ही सदा आधारित नहीं होती। कभी-कभी दी हुई युक्ति दो या अधिक अविकल्पी युक्तियों के अवमुख संयोजन (Convex Combination) से निम्न हो सकती है। एक विशेष स्थिति में दी हुई युक्ति दो या अधिक अविकल्पी युक्तियों के औसत से निम्न हो सकती है। ऐसी स्थितियों में, यदि दी हुई युक्ति दो या अधिक अविकल्पी युक्तियों के औसत से निम्न हो, तो भुगतान आव्यूह से निम्न युक्ति को हटा दिया जाता है और आव्यूह की साइज को काफी कम कर दिया जाता है। इस तरह, हम यह देखते हैं कि प्रमुखता न केवल अविकल्पी स्थितियों में लागू होती है, बल्कि **सविकल्प युक्तियों** (Mixed Strategies) के आधार पर भी लागू की जा सकती हैं, क्योंकि दो या अधिक अविकल्पी युक्ति सविकल्प युक्तियों की एक स्थिति होती है। इस प्रकार के प्रमुखता गुणधर्म को **आपरिवर्तित प्रमुखता गुणधर्म** (Modified Dominance Property) कहा जाता है। प्रमुखता गुणधर्म के प्रयोग को नीचे के उदाहरण में दिखाया गया है :

उदाहरण 7 : प्रमुखता संकल्पना को लागू करके निम्नलिखित खेल को हल कीजिए :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : इस खेल में कोई पल्याण विन्दु नहीं है। पहली पंक्ति के अवयव तीसरी पंक्ति के संगत अवयव से छोटे या बराबर हैं। अत: पहली पंक्ति पर तीसरी पंक्ति की प्रमुखता है। और खेल घटकर यह हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

और, पहले स्तंभ के अवयव तीसरे स्तंभ के संगत अवयवों से बड़े या बराबर हैं। अत: पहले

स्तंभ पर तीसरे स्तंभ की प्रमुखता है और आव्यूह घटकर यह हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

और, ऊपर दिए गए आव्यूह में दुसरे और तीसरे स्तंभ के अवयवों का **अवमुख संयोजन** (Convex Combination) (अवयवों का औसत) $\left\{\frac{2+4}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right\}$ अर्थात् [3, 2, 4] है और इस तरह प्राप्त अवयव पहले स्तंभ के संगत अवयव से छोटे या बराबर हैं। इसलिए खिलाड़ी B, अपनी युक्ति B_2 की तुलना में B_3 और B_4 का अवमुख संयोजन खेलना पसंद करेगा। इसलिए युक्ति B_2 को हटा दिया जाता है और तब खेल यह हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

और A_3 और A_4 का अवमुख संयोजन (अवयवों का औसत) यह होता है :

$$\left[\frac{4+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right] \text{ अर्थात् } [2, 4]$$

इस तरह, पहली पंक्ति के अवयव, A_3 और A_4 युक्तियों के औसत के संगत अवयवों के बराबर होते हैं। इसलिए, खिलाड़ी A, A_3 और A_4 के अवमुख संयोजन को खेलना पसंद करेगा। युक्ति A_2 को हटा दिया जाता है और हमें 2×2 आव्यूह प्राप्त होता है

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

इष्टतम युक्तियों को लघु-विधि से प्राप्त किया जा सकता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\frac{8}{12} \quad \frac{4}{12}.$$

इष्टतम युक्तियां ये होती हैं :

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $\frac{8}{3}$ है।

उदाहरण 8 : प्रमुखता गुणधर्म को लागू करके निम्नलिखित खेल का साइज कम कीजिए। इस तरह इष्टतम युक्तियों और खेल का मान ज्ञात कीजिए।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

हल : दिए हुए खेल का कोई पल्याण बिन्दु नहीं है। और, तीसरे स्तंभ के अवयव पहले स्तंभ के संगत अवयव से बड़ा है। अतः तीसरे स्तंभ पर पहली पंक्ति की प्रमुखता होती है। इसे हटाने पर खेल निम्नलिखित 3×2 आव्यूह का हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस आव्यूह में ऐसा कोई पंक्ति या स्तंभ नहीं है जिसकी किसी अन्य पंक्ति या स्तंभ पर प्रमुखता हो। और, आपरिवर्तित प्रमुखता गुणधर्म की सहायता से भी खेल की साइज को कम किया जा सके। अतः ग्राफीय विधि से इसे 2×2 की कोटि का किया जाता है। दिया हुआ आव्यूह निम्नलिखित दो आव्यूहों में समानीत (Reduce) हो जाता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \ldots(3)$$

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \ldots(4)$$

अब लघु-विधि से दो खेलों (3) और (4) को हल किया जा सकता है।

लघु-विधि से खेल (3) को हल करने पर

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \frac{0}{5} = 0 \\ \frac{5}{5} = 1 \end{array}$$

युक्तियां ये हैं

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \text{और} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

और खेल का मान = 2

इसी प्रकार, आव्यूह (4) को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \frac{0}{5} = 0 \\ \frac{5}{5} = 1 \\ \\ \end{array}$$

इष्टतम युक्तियां ये हैं :

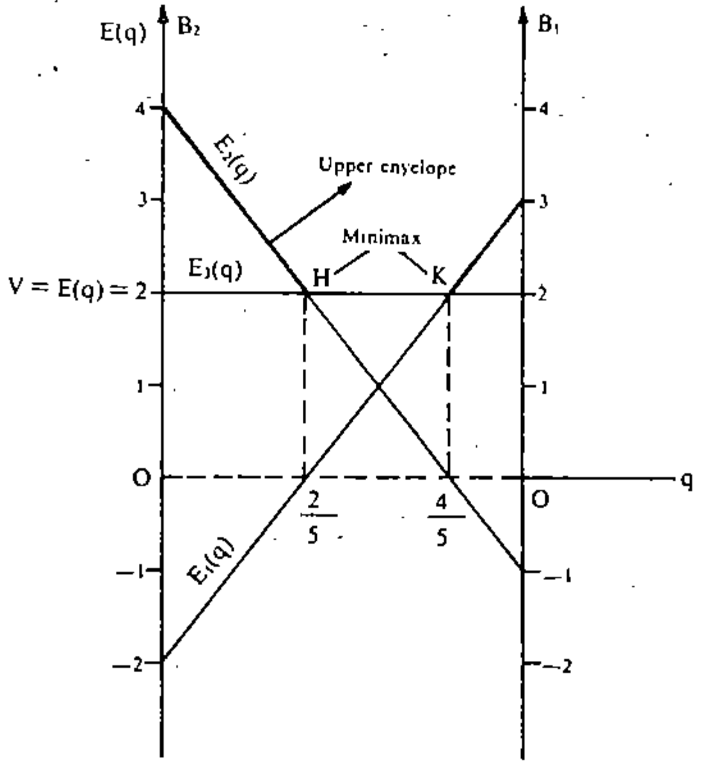
$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \text{और} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

और खेल का मान = 2

प्रश्न 6 : प्रमुखता गुणधर्म का प्रयोग करके निम्नलिखित खेल की सर्वोत्तम युक्तियां और मान ज्ञात कीजिए।

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$



4

प्रश्न 7 : प्रमुखता गुणधर्म से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए।

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{खिलाड़ी B} \\
 & \begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} \\
\text{खिलाड़ी A} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

15.6 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने पढ़ा है :

1) $2 \times n$ खेलों का ग्राफीय हल।

2) $m \times 2$ खेलों का ग्राफीय हल।

3) प्रमुखता और आधिपत्य नियमों और उनका [illegible] खेल की साइज को कम करने में इनका अनुप्रयोग.

4) खेल की साइज को 2×2 की कोटि के खेलों के [illegible]

15.7 उत्तर/संकेत/ हल (Answers/Hints/Solutions)

E1) खिलाड़ियों A और B की इष्टतम युक्तियां ये होती हैं

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array}$$

$\left[\frac{3}{2} \quad \frac{2}{5}\right]$ और $\left[0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad 0\right]$ खेल का मान V = 39.

E2) इष्टतम युक्तियां $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

खेल का मान $V = -\frac{11}{5}$.

E3) इष्टतम युक्तियां $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{5}{11} & 0 & \frac{6}{11} & 0 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{8}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

खेल का मान $V = \frac{-7}{11}$.

E4) इष्टतम युक्तियां $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \frac{5}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

खेल का मान = $\frac{1}{4}$.

E5) क) (A_1, B_3): $V = 6$

ख) $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$; $V = 13$

E6) $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{13}{18} & \frac{5}{18} \end{bmatrix}$; $V = \frac{10}{3}$

E7) (A_{III}, B_{II}): $V = 7$.

15.8 शब्दावली (Glossary)

अन्वालोप	Envelope
अवमुख संयोजन	Convex Combination
आपरिवर्तित	Modified
ग्राफीय हल	Graphical Solution
प्रत्याशित	Expected
प्रमुखता	Dominance

इकाई 16 खेल और रैखिक प्रोग्रामन (Games and Linear Programming)

इकाई की रूपरेखा (Structure)

16.1 प्रस्तावना (Introduction)

अभी तक आपने उन खेलों को हल करने की विधियों का अध्ययन किया है जिनमें या तो एक पल्याण बिन्दु (Saddle Point) होता है या जिन्हें छोटी साइज के खेल में समानीत किया जा सकता है। इन्हें हल करने में या तो प्रमुखता संकल्पना (Concept of Dominance) का प्रयोग किया जाता है या उस ग्राफीय विधि का प्रयोग किया जाता है जबकि पंक्तियों या स्तंभों की संख्या 2 से अधिक नहीं होती है। परन्तु, यदि भुगतान आव्यूह बड़ी साइज का हो और प्रमुखता नियम से इसे छोटी साइज ($m \times 2$ या $2 \times n$) में समानीत करना संभव न हो तो नीचे दी गई विधियों में से किसी विधि से इसे हल किया जा सकता है :

i) बीजीय विधि जबकि भुगतान आव्यूह (Pay–off Matrix) एक वर्ग आव्यूह (Square Matrix) है।

ii) रैखिक प्रोग्रामन विधि

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का मुख्य उद्देश्य उस तकनीक को बताना है जिससे किसी भी साइज के द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल (Two–Person Zero–Sum Game) वाले आव्यूह को हल किया जा सकता हो। अत: इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- किसी भी साइज के द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल में खिलाड़ियों की इष्टतम सविकल्प युक्तियों (Optimum Mixed Strategies) को ज्ञात कर सकेंगे;
- उस खेल का मान ज्ञात कर सकेंगे जिसका ($m \times 2$) की कोटि वाला भुगतान आव्यूह हो।

16.2 बीजीय विधि जबकि भुगतान आव्यूह एक वर्ग आव्यूह हो (Algebraic Method when the Pay-off is a Square Matrix)

भाग 14.2 में 2×2 की कोटि वाले भुगतान आव्यूह को, जिसमें कोई पल्याण बिन्दु नहीं है, हल करने की बीजीय विधि बतायी जा चुकी है। यह विधि किसी भी कोटि के वर्ग आव्यूह पर भी लागू की जा सकती है। यदि भुगतान आव्यूह, 4×4 की कोटि वाला हो, तो समस्या खिलाड़ी A के लिए उन 4 प्रायिकताओं (Probabilities) P_1, P_2, P_3, P_4, को ज्ञात करने की होती है जिनसे वह 4 अविकल्पी युक्तियों (Pure Strategies) से सविकल्प युक्तियां (Mixed Strategies) प्राप्त कर सके और खिलाड़ी B के लिए भी उन 4 प्रायिकताओं q_1, q_2, q_3, q_4 को ज्ञात करने की होती है जिनसे वह 4 अविकल्पी युक्तियों से सविकल्प युक्ति प्राप्त कर सकें। नीचे एक उदाहरण लेकर इस विधि को समझने का प्रयास किया गया है।

उदाहरण **1** : बीजीय विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए। जिसका 3×3 की कोटि वाला भुगतान आव्यूह यह है :

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

हल : मान लीजिए खिलाड़ियों A और B की सविकल्प युक्तियां क्रमश: S_A और S_B हैं जिससे कि

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

जहां $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ और $p_i(i = 1, 2, 3) \geq 0$; $q_j(j = 1, 2, 3) \geq 0$

मान लीजिए खेल का मान v है। अब खिलाड़ी A, प्रायिकता $p_i(i = 1, 2, 3)$ से उन युक्तियों का चयन करता है जो कि B की किसी भी अविकल्पी युक्ति के लिए उसके न्युनतम प्रत्याशित भुगतान (लाभ) को अधिकतम कर देता है जबकि खिलाड़ी B, प्रायिकताओं $a_j(j = 1, 2, 3)$ से अपनी युक्तियों का चयन करता है जो कि भुगतान आव्यूह में A की किसी भी अविकल्पी युक्ति के लिए अधिकतम प्रत्याशित भुगतान (हानियों) को न्यूनतम कर देता है।

क्योंकि खिलाड़ी A अपने लाभ को अधिक से अधिक करना चाहेगा या कम से कम इतना लाभ तो वह अवश्य चाहेगा कि वह लाभ खेल के मान के बराबर हो, इसलिए खिलाड़ी B की किसी एक अविकल्पी युक्तियों के विरुद्ध खिलाड़ी A के प्रत्याशित लाभ निम्नलिखित संबंधों से प्राप्त होंगे :

$$g_1 = -p_1 + p_2 + 3p_3 \geq v$$

$$g_2 = 2p_1 - 2p_2 + 4p_3 \geq v$$

$$g_3 = p_1 + 2p_2 - 3p_3 \geq v$$

इसी प्रकार खिलाड़ी A की किसी एक अविकल्पी युक्ति के विरुद्ध खिलाड़ी B के प्रत्याशित भुगतान (हानियां) खेल के मान v से कम या इसके बराबर होंगे, क्योंकि B अपनी हानि को कम से कम करना चाहेगा या कम से कम इतना तो चाहेगा कि हानि खेल के बराबर हो। अत:

$$l_1 = -q_1 + 2q_2 + q_3 \leq v$$

$$l_2 = q_1 - 2q_2 + 2p_3 \leq v$$

$$l_3 = 3q_1 + 4q_2 - 3q_3 \leq v$$

अब ऊपर दिए गए संबंधों का समीकरणों को रूप में लेने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$-p_1 + p_2 + 3p_3 = v \quad \dots (1)$$

$$2p_1 - 2p_2 + 4p_3 = v \quad \dots (2)$$

$$p_1 + 2p_2 - 3p_3 = v \quad \dots (3)$$

$$-q_1 + 2q_2 + q_3 = v \quad \dots (4)$$

$$q_1 - 2q_2 + 2q_3 = v \quad \dots (5)$$

$$3q_1 + 4q_2 - 3q_3 = v \quad \dots (6)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad \dots (7)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \quad \dots (8)$$

(1) और (2) से तथा (2) और (3) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$3p_1 - 3p_2 + p_3 = 0$$

और $$p_1 - 4p_2 + 7p_3 = 0$$

वज्र गुणन (Cross Multiplication) करने और अनुपात तथा समानुपात नियम लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{p_1}{-21+4} = \frac{p_2}{1-21} = \frac{p_3}{-12+3} = \frac{p_1+p_2+p_3}{-(17+20+9)} = \frac{1}{-46} \text{ ((7) से)}$$

या $$\frac{p_1}{17} = \frac{p_2}{20} = \frac{p_3}{9} = \frac{1}{46}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{17}{46},\ p_2 = \frac{20}{46},\ p_3 = \frac{9}{46}$$

इसी प्रकार, (4) और (5) से तथा (5) और (6) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$2q_1 - 4q_2 + q_3 = 0$$

$$2q_1 + 6q_2 - 5q_3 = 0$$

वज्र गुणन और सरल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{q_1}{20-6} = \frac{q_2}{2+10} = \frac{q_3}{12+8} = \frac{q_1+q_2+q_3}{14+12+20} = \frac{1}{46} \text{ ((8) से)}$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{14}{46},\ q_2 = \frac{12}{46} \text{ और } q_3 = \frac{20}{46}$$

अब p_1, p_2, p_3 या q_1, q_2, q_3 के मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$v = -p_1 + p_2 + p_3 = -\frac{17}{46} + \frac{26}{46} + \frac{27}{46} = \frac{30}{46} = \frac{15}{23}$$

$$= -q_1 + 2q_2 + q_3 = -\frac{14}{46} + \frac{24}{46} + \frac{20}{46} = \frac{30}{46} = \frac{15}{23}$$

अत: खिलाड़ियों A और B की इष्टतम सविकल्प युक्तियों (Optimum Mixed Strategies) ये होती हैं :

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{17}{46} & \frac{20}{46} & \frac{9}{46} \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{14}{46} & \frac{12}{46} & \frac{20}{46} \end{bmatrix}$$

खेल का मान $v = \frac{15}{23}$.

प्रश्न 1 : क) 3×3 खेल से संबंधित निम्नलिखित भुगतान आव्यूह की इष्टतम युक्तियां और खेल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) निम्नलिखित खेल को हल कीजिए।

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी } Q \\ \text{खिलाड़ी } P & \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

ग) निम्नलिखित खेल को हल कीजिए।

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी } B \\ \text{खिलाड़ी } A & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

आइए हम भाग 15.5 के उदाहरण 7 में दिए गए खेल को फिर से लें जिसका भुगतान आव्यूह यह है :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

प्रमुखता नियम (Dominance Principle) और ग्राफीय विधि से खेल की साइज को कम करके इस खेल को पहले हल किया जा चुका है। लेकिन, क्योंकि यह 3×3 की कोटि वाला एक वर्ग भुगतान आव्यूह (Square Pay-off Matrix) है, इसलिए इसे हम भाग 16.2 में बताई गई बीजीय विधि से भी हल करना चाहेंगे।

मान लीजिए खिलाड़ियों A और B की सविकल्प इष्टतम युक्तियां क्रमशः S_A और S_B हैं, जिससे कि

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

जहां $p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ q_1 + q_2 + q_3 = 1$ ... (9)

और $p_i(i = 1, 2, 3) \geq 0, q_j(j = 1, 2, 3) \geq 0$

और, मान लीजिए कि खेल का मान v है।

बीजीय विधि (भाग 16.2) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

खिलाड़ी A के लिए

$$3p_1 - p_2 + 2p_3 \geq v \quad \text{... (10)}$$

$$-2p_1 + 4p_2 + 2p_3 \geq v \quad \text{... (11)}$$

$$4p_1 + 2p_2 + 6p_3 \geq v \quad \text{... (12)}$$

खिलाड़ी B के लिए

$$3q_1 - 2q_2 + 4q_3 \leq v \quad \text{... (13)}$$

$$-q_1 + 4q_2 + 2q_3 \leq v \quad \text{... (14)}$$

$$2q_1 + 2q_2 + 6q_3 \leq v \quad \text{... (15)}$$

(4) से (15) तक के संबंधों को समीकरण रूप में लेने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$3p_1 - p_2 + 2p_3 = -2p_1 + 4p_2 + 2p_3 = 4p_1 + 2p_2 + 6p_3 = v \quad \text{... (16)}$$

और

$$3q_1 - 2q_2 + 4q_3 = -q_1 + 4q_2 + 2q_3 = 2q_1 + 2q_2 + 6q_3 = v \quad \text{... (17)}$$

(16) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$5p_1 - 5p_2 + 0p_3 = 0$$

और $p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 0$

$$\therefore \quad \frac{p_1}{-20} = \frac{p_2}{1 - 20} = \frac{p_3}{15 + 15}$$

या $$\frac{p_1}{-20} = -\frac{p_2}{19} = \frac{p_3}{20} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{-19} = \frac{1}{-19}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{20}{19},\ p_2 = 1,\ p_3 = -\frac{20}{19}$$

जो कि (9) में दिए गए संबंधों से मेल नहीं खाते। अतः संबंधों को ठीक समीकरणों के रूप में लेने पर (10) से (17) तक की **असमिकाओं** (Inequalities) के हल प्राप्त नहीं किए जा सकते। इसलिए, इसे या तो 15.5 में बतायी गई विधि से या भाग 16.3 में बतायी जाने वाली **रैखिक प्रोग्रामन विधि** (Linear Programming Method) से हल करना होगा।

16.3 आयताकार आव्यूह खेल को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में समानीत करना (Reducing the Rectangular Matrix Game to that of a Linear Programming Problem)

आइए हम एक खेल लें जिसका भुगतान आव्यूह यह है

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी B} \\ \text{खिलाड़ी A} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

इस खेल का कोई भी **पल्याण बिन्दु** (Saddle Point) नहीं हैं। खिलाड़ी A का **महाल्पिष्ठ** (Maximum) मान 1 है और B का **अल्पमहिष्ठ** (Minimax) मान 2 है। अत: हमें यह प्राप्त होता है :

A का महाल्पिष्ठ मान < खेल का मान < B का अल्पमहिष्ठ मान अत: खेल का मान 1 और 2 के बीच होगा। इसलिए यह धनात्मक होगा अर्थात् $v > 0$.

मान लीजिए अपनी इष्टतम सविकल्प युक्तियां प्राप्त करने के लिए खिलाड़ी A प्रायिकताओं p_1, p_2, p_3 से अपनी युक्तियों A_1, A_2, A_3 को खेलता है और खिलाड़ी B प्रायिकताओं q_1, q_2, q_3, q_4 से अपनी युक्तियों B_1, B_2, B_3, B_4 को खेलता है। अत :

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

जिससे कि

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

और $\quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

जहां $\quad p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0$

और $\quad q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0$

जब खिलाड़ी A, खिलाड़ी B की अविकल्पी युक्तियां B_1, B_2, B_3, B_4 में से किसी भी युक्ति के विरुद्ध अपनी युक्तियां A_1, A_2 और A_3 का खेलता है तो उसके प्रत्याशित भुगतान (लाभ) (g_1, g_2, g_3, g_4) से दिए जाते हैं, जहां

$$g_1 = 2p_1 + 5p_2 + p_3$$

$$g_2 = 3p_1 + 4p_2 + 3p_3$$

$$g_3 = -p_1 + 2p_2 + 8p_3$$

$$g_4 = 0p_1 - 2p_2 + 2p_3$$

जहां $\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$

जहां खिलाड़ी B, खिलाड़ी A की युक्तियों A_1, A_2, A_3 में से किसी भी युक्ति के विरुद्ध अपनी युक्तियों B_1, B_2, B_3, B_4 को खेलता है तो उसके प्रत्याशित भुगतान (हानियां) (L_1, L_2, L_3) से दिए जाते हैं, जहां

$$L_1 = 2q_1 + 3q_2 - q_3 + 0q_4$$

$$L_2 = 8q_1 + 4q_2 + 2q_3 - 2q_4$$

$$L_3 = q_1 + 3q_2 + 8q_3 + 2q_4$$

जहां $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

अब महाल्पिष्ठ और अल्पमहिष्ठ नियम के अनुसार खिलाड़ी A, p_1, p_2, p_3 के मान प्राप्त करना चाहेगा जो कि उसके न्यूनतम प्रत्याशित लाभ $u = \min[g_1, g_2, g_3, g_4]$ को अधिकतम कर दे, जबकि खिलाड़ी B, q_1, q_2, q_3, q_4 के मान प्राप्त करना चाहेगा जो कि उसकी अधिकतम प्रत्याशित हानि $= \max[L_1, L_2, L_3]$ को न्यूनतम कर दे। लेकिन, यहां दिए हुए आयताकार खेल में महाल्पिष्ठ मान $u = 1$ और अल्पमहिष्ठ मान $v = 2$ और दोनों धनात्मक हैं। अत: ऊपर दिए गए g_1, g_2, g_3, g_4 के व्यंजकों (Expressions) को u से और L_1, L_2, L_3 के व्यंजकों को v से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{g_1}{u} = 2\frac{p_1}{u} + 5\frac{p_2}{u} + \frac{p_3}{u} \geq \frac{u}{u}$$

$$\frac{g_2}{u} = 3\frac{p_1}{u} + 4\frac{p_2}{u} + 3\frac{p_3}{u} \geq \frac{u}{u}$$

$$\frac{g_3}{u} = -\frac{p_1}{u} + 2\frac{p_2}{u} + 8\frac{p_3}{u} \geq \frac{u}{u}$$

$$\frac{g_4}{u} = 0\frac{p_1}{u} - 2\frac{p_2}{u} + 8\frac{p_3}{u} \geq \frac{u}{u}$$

$$\frac{p_1}{u} + \frac{p_2}{u} + \frac{p_3}{u} = \frac{1}{u}.$$

और $$\frac{L_1}{v} = 2\frac{q_1}{v} + 3\frac{q_2}{v} - \frac{q_3}{v} + 0\frac{q_4}{v} \leq \frac{v}{v}$$

$$\frac{L_2}{v} = 5\frac{q_1}{v} + 4\frac{q_2}{v} + 2\frac{q_3}{v} - 2\frac{q_4}{v} \leq \frac{v}{v}$$

$$\frac{L_3}{v} = \frac{q_1}{v} + 3\frac{q_2}{v} + 8\frac{q_3}{v} + 2\frac{q_4}{v} \leq \frac{v}{v}$$

$$\frac{q_1}{v} + \frac{q_2}{v} + \frac{q_3}{v} + \frac{q_4}{v} = \frac{1}{v}.$$

अब हम यहां कुछ नए चर परिभाषित कर रहे हैं

$$X_1 = \frac{p_1}{u},\ X_2 = \frac{p_2}{u},\ X_3 = \frac{p_3}{u}$$

और $$Y_1 = \frac{q_1}{v},\ Y_2 = \frac{q_2}{v},\ Y_3 = \frac{q_3}{v},\ Y_4 = \frac{q_4}{v}$$

जहां $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{u}$ और $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \frac{1}{v}$.

अतः A की समस्या u को अधिकतम करना अर्थात् $\frac{1}{u}$ को न्यूनतम करना या $X^* = (X_1 + X_2 + X_3)$ को न्यूनतम करना हो जाती है, जबकि

$$\left.\begin{aligned} &2X_1 + 5X_2 + X_3 \geq 1 \\ &3X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 1 \\ &-X_1 + 2X_2 + 8X_3 \geq 1 \\ &0X_1 - 2X_2 + 2X_3 \geq 1 \\ &X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots (18)$$

जबकि B की समस्या यह हो जाती है

v को न्यूनतम या $\frac{1}{v}$ को अधिकतम अर्थात् $Y^* = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$ को अधिकतम करना, जबकि

$$\left.\begin{aligned} &2Y_1 + 3Y_2 - Y_3 + 0Y_4 \leq 1 \\ &5Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \leq 1 \\ &Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3 + 2Y_4 \leq 1 \\ &Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \leq 10 \end{aligned}\right| \quad \ldots (19)$$

(18) में दी गई A की समस्या और (19) में दी गई B की समस्या रैखिक प्रोग्रामन समस्याएं (Linear Programming Problems) हैं, और यदि एक आद्य (Primal) है तो दूसरा इसका द्वैत (Dual) होता है।

इस तरह हमने आयताकार आव्यूह खेल को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में समानीत (Reduce) कर दिया है। दो उद्देश्य फलनों (Objective Functions) के इष्टतम मान बराबर हैं अर्थात्

अधिकतमीकरण $Y^* = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$

= न्यूनतमीकरण $X^* = (X_1 + X_2 + X_3)$

या $\quad \max\left(\frac{1}{v}\right) = \min\left(\frac{1}{u}\right)$

या $\quad \min v = \max u$

$\Rightarrow \quad \bar{v} = \underline{v}$

$\rightarrow \quad \underline{v}$ – खेल का मान $\underline{v} = \bar{v}$

रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए हम B की समस्या लेते हैं और इसे एकधा विधि (Simplex Method) से हल करते हैं, क्योंकि इसे केवल न्यूनतापूरक चरों (Slack Variables) की आवश्यकता होती है। खिलाड़ी B की इष्टतम युक्तियां और खेल का मान एकधा विधि से ज्ञात किया जाता है। खिलाड़ी A की इष्टतम युक्तियां ऊपर दी गई B की रैखिक प्रोग्रामन समस्या के द्वैत हल (Dual Solutions) से प्राप्त की जाती हैं।

एकधा विधि से B की समस्या का हल (Solution of B's Problem by Simplex Method)

(19) के व्यवरोधों (Constraints) में न्यूनतापूरक चरों (Slack Variables) Y_5, Y_6, Y_7 को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$Y^* = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$$

का अधिकतमीकरण जबकि

$$2Y_1 + 3Y_2 - Y_3 - 0Y_4 + Y_5 = 1$$

$$5Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 + Y_6 = 1$$

$$Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3 + 2Y_4 + Y_7 = 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7 \geq 0$$

प्रारंभिक एकधा सारणी (The Initial Simplex Table)

		C_j	1	1	1	1	0	0	0	अनुपात
C_B	Y_B	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	
0	Y_5	1	2	3	−1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$
0	Y_6	1	5	4	2	−2	0	1	0	$\frac{1}{5} \rightarrow$
0	Y_7	1	1	3	8	2	0	0	1	1
$Y^* = 0$	$Z_j - C_j$	−1 ↑	−1	−1	−1	−1	0	0	0	

द्वितीय एकधा सारणी (Second Simplex Table)

		C_j	1	1	1	1	0	0	0	अनुपात
C_B	Y_B	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	
0	Y_5	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{4}$
1	Y_1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	–
0	Y_7	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{38}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3} \rightarrow$
$Y^* = \frac{1}{5}$	$\Delta_j = Z_j - C_j$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0 ↑	$\frac{1}{5}$	0		

तृतीय एकधा सारणी (Third Simplex Table)

		C_j	1	1	1	1	0	0	0
C_B	Y_{ij}	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
0	Y_5	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	Y_1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	Y_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{11}{12}$	$\frac{38}{12}$	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$Y^* = \frac{2}{3}$	$\Delta_j = Z_j - C_j$	0	$\frac{13}{12}$	$\frac{23}{6}$	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	

क्योंकि $Z_j - c_j \le 0$, इसलिए हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता है:

$$Y_1 = \frac{1}{3},\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 0,\ Y_4 = \frac{1}{3} \text{ और } Y^* = \frac{2}{3}$$

लेकिन $Y_1 = \frac{q_1}{v}$, $Y_2 = \frac{q_2}{v}$, $Y_3 = \frac{q_3}{v}$, $Y_4 = \frac{q_4}{v}$ और $v = \frac{1}{Y^*} = \frac{3}{2}$

$$q_1 = Y_1 v = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = Y_2 v = 0.\frac{3}{2} = 0$$

$$q_3 = Y_3 v = 0.\frac{3}{2} = 0$$

$$q_4 = Y_4 v = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

खिलाड़ी B की इष्टतम युक्तियां ये हैं

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ और } v = \frac{2}{3}$$

समस्या के द्वैत हल से खिलाड़ी A की इष्टतम युक्तियां प्राप्त होती हैं। इस तरह

$$X_1 = 0,\ X_2 = \frac{1}{12},\ X_3 = \frac{7}{12},\ X^* = \frac{2}{3},\ u = \frac{3}{2}$$

इस तरह

$$p_1 = X_1 u = 0.\frac{3}{2} = 0$$

$$p_2 = X_2 u = \frac{1}{12}.\frac{3}{2} = \frac{1}{8}$$

$$p_3 = X_3 u = \frac{7}{12} - \frac{3}{2} = \frac{7}{8}$$

खिलाड़ी A की इष्टतम युक्तियां ये हैं :

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $\frac{3}{2}$ है।

अब हम खेल-सिद्धांत के मूलभूत प्रमेय का कथन देंगे जिसकी सहायता से हम रैखिक प्रोग्रामन के जरिए किसी भी खेल समस्या को हल कर सकते हैं।

प्रमेय : $m \times n$ की कोटि के प्रत्येक आयताकार खेल को **सविकल्प युक्तियों** (Mixed Strategies) के रूप में हल किया जा सकता है अर्थात् यदि एक आयताकार खेल के लिए सविकल्प युक्तियों को अपनायी जाए तो खेल के एक मान v का सदैव ही अस्तित्व होता है, जोकि यह होता है :

$$\underline{v} = v = \overline{v}.$$

जहां $\underline{v}$ और $\overline{v}$ खेल के क्रमशः निम्न मान और उपरि मान हैं।

उपपत्ति : इस प्रमेय की उपपत्ति रैखिक प्रोग्रामन की द्वैत सिद्धांत पर आधारित होती है जहां द्वैत प्रमेय के अनुसार यदि **आद्य** (Primal) या द्वैत (Dual) में H से किसी एक का एक **परिमित इष्टतम** (Finite Optimum) हो, तो दूसरे का भी परिमित इष्टतम होता है और दो **उद्देश्य फलनों** (Objective Functions) के इष्टतम मान बराबर होते हैं।

द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल (Two-Person Zero-Sum Game) के संबंध में हमने यह दिखाया है कि आयताकार आव्यूह खेल को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में समानीत किया जा सकता है और दो खिलाड़ियों की समस्याएं एक दूसरे की द्वैत होती हैं। और, यदि $\underline{v}$ और $\overline{v}$ दो खिलाड़ियों A और B के क्रमशः महाल्पिष्ठ मान और अल्पमिहष्ठ मान हों, तो $\underline{v}$ और $\overline{v}$ खेल के निम्न और उपरि मान होते हैं। अत द्वैत प्रमेय के अनुसार आद्य और द्वैत दोनों के परिमित इष्टतम होते हैं और दो उद्देश्य फलनों के इप्टतम मान बराबर होते हैं।

अर्थात् $\max Y^* = \min X^*$

जहां $\max Y^* = \frac{1}{\overline{v}}$ और $X^* = \frac{1}{\underline{v}}$

इस तरह

$$\underline{v} = v = \overline{v}$$

जहां v, खेल का मान है।

अत: हम सदा ही दो खिलाड़ियों की इष्टतम सविकल्प युक्तियां ज्ञात कर सकते हैं।

16.4 इष्टतम सविकल्प युक्तियों के महत्वपूर्ण गुणधर्म (Important Properties of Optimal Mixed Strategies)

इस भाग में हम इष्टतम सविकल्प युक्तियों के तीन महत्वपूर्ण गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे।

i) यदि दो खिलाड़ियों में से कोई एक खिलाड़ी अपनी इष्टतम मिश्रित युक्ति से चिपका रहता

है और दूसरा खिलाड़ी अपनी इष्टतम युक्ति से विचलित होता है, तो इस स्थिति में विचलनकारी खिलाड़ी अपनी उपलब्धि में केवल कमी ही कर सकता है और कभी भी वृद्धि नहीं कर सकता। अधिक से अधिक वह अपनी उपलब्धि के बराबर कर सकता है।

ii) यदि दो खिलाड़ियों में से कोई भी खिलाड़ी अपनी इष्टतम युक्ति से चिपका रहता है, तो उस स्थिति में खेल के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता जबकि दूसरा खिलाड़ी अपनी आलंबी युक्तियों का प्रयोग या तो अकेले या किसी अन्य के साथ मिलकर करता हो।

उपपत्ति : मान लीजिए खिलाड़ी $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$, खिलाड़ी A के भुगतान (लाभ) हैं जबकि वह अपनी इष्टतम युक्तियों का प्रयोग करता हो और खिलाड़ी B अपनी अविकल्पी आलंबी युक्तियों $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ का प्रयोग करता हो। अब, क्योंकि B प्रायिकताओं $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \ldots, y_n^*$ से अपनी अविकल्पी युक्तियों (B की इष्टतम युक्तियों) का प्रयोग करता है, इसलिए

$$v = g_1 y_1^* + g_2 y_2^* + g_3 y_3^* + \ldots + g_n y_n^* \qquad \ldots (20)$$

क्योंकि खिलाड़ी का उद्देश्य अपनी हानि को कम से कम करनी है, इसलिए

$$v = g_1 y_1^* + \ldots + g_n y_n^* = \underset{y_1 \ldots, y_n}{\text{Min}} [g_1 y_1 + \ldots + g_n y_n]$$

विशेष रूप में, k के विभिन्न मानों 1, ..., n पर यदि हम $y_j = 0 \; \forall j \neq k$ और $y_k = 1$ लें, तो हमें $v \leq g_k, k = 1, \ldots n$ प्राप्त होता है। ... (21)

इस तरह, यदि खिलाड़ी B कोई अन्य सविकल्प युक्ति $(y_1 \ldots, y_n)$ का चयन करता है, तो समीकरण (21) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k g_k \geq v \sum_{k=1}^{n} y_k$$

अर्थात् $y_1 g_1 + \ldots + y_n g_n \geq v$.

इससे यह पता चलता है कि खिलाड़ी B अपनी हानि को कम नहीं कर सकता। इसी प्रकार, हम यह दिखा सकते हैं कि यह परिणाम तब भी लागू होता है जबकि खिलाड़ी B अपनी इष्टतम युक्ति से चिपका रहता है।

iii) यदि भुगतान आव्यूह के प्रत्येक अवयव में एक नियत संख्या C जोड़ी जाए तो इष्टतम युक्तियों में कोई परिवर्तन नहीं आता, परन्तु खेल के मान में C की वृद्धि हो जाती है।

उपपत्ति : मान लीजिए भुगतान आव्यूह $(a_{ij})_{m \times n}$ है और मान लीजिए भुगतान आव्यूह के प्रत्येक अवयव में एक नियत संख्या C जोड़ी गई है। इस तरह, अवयव a_{ij}, $(a_{ij} + C)$ हो जाता है।

अब, यदि $E_1(x, y)$ मूल भुगतान आव्यूह $(A_{ij})_{m \times n}$ का भुगतान फलन हो, तो

$$E_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

और, यदि $E_2(x, y)$ नए भुगतान आव्यूह $(a_{ij} = C)_{m \times n}$ का भुगतान फलन हो, तो

$$E_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i (a_{ij} + C) y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_i + C \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i$$

$$= E_1(x, y) + C.1 \quad \left[\because \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right]$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि C को जोड़ने से $E_1(x, y)$ की प्रकृति में कोई अंतर नहीं आता। दसरे शब्दों में, दो खेलों की इष्टतम युक्तियों में कोई परिवर्त्तन नहीं होता अर्थात् दो खेलों की इष्टतम युक्तियां समान बनी रहती हैं, और, यदि x^*, y^* दो खेलों की इष्टतम युक्तियां हो, तो

$$E_2(x^*, y^*) = E_1(x^*, y^*) + C$$

नए खेल का मान $= v + C$.

अत: खेल के मान में केवल C की वृद्धि होती है, जबकि भुगतान आव्यूह के प्रत्येक अवयव में एक नियत अचर C जोड़ा गया हो।

ध्यान दीजिए कि यदि भुगतान आव्यूह में ऋण अवयव और शून्य अवयव हों, तो संभव है कि भाग 16.3 में दिए गए u और v के मान शून्य हो जाए। ऐसी स्थितियों में शून्य को भाग देने से बचने के लिए हम भुगतान आव्यूह के प्रत्येक अवयव में एक धन अचर जोड़ सकते हैं जिससे कि u और v धनात्मक बने रहें। ध्यान दीजिए कि यदि अपरिवर्तित भुगतान आव्यूह से संबंधित खेल का मान v^* हो तो मूल भुगतान आव्यूह से संबंधित खेल का मान $v^* - C$ हो जाता है। यही मुख्यत: भाग 16.5 के गुणधर्म III का उद्देश्य है। आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : दो कंपनियां A और B के बीच B समान उत्पाद के लिए स्पर्धा चल रही है। इनकी विभिन्न युक्तियां निम्नलिखित भुगतान आव्यूह से दी गई हैं:

कंपनी B

$$\text{कंपनी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

रैखिक प्रोग्रामन विधि से दोनों कंपनियों की इष्टतम युक्तियां ज्ञात कीजिए और खेल का मान भी प्राप्त कीजिए।

हल : भुगतान आव्यूह यह है:

कंपनी B

$$\text{कंपनी A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{...(22)}$$

दी हुई खेल समस्या में कोई पल्याण बिन्दु नहीं है और कंपनी A के लिए महाल्पिष्ठ मान –2 है और कंपनी B के लिए अल्पमहिष्ठ मान 2 है।

अत: खेल का मान –2 और +2 के बीच होता है यह ऋणात्मक भी हो सकता है। भुगतान आव्यूह में अधिकतम ऋण संख्या (–3) है। अत: हम (iii) में एक अचर जोड़ देंगे जिससे कि भुगतान आव्यूह के सभी अवयव शून्य हो जाएं और भुगतान आव्यूह यह हो जाए:

$$\text{कंपनी A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \text{कंपनी B} \\ \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \ldots(23)$$

भुगतान आव्यूह (23) को लेने पर हमें A का महाल्पिष्ठ मान = 2 और B का अल्पमहिष्ठ मान = 6 प्राप्त होते हैं।

इसलिए, नए आव्यूह खेल (23) का मान 2 और 6 के बीच स्थित होता है जो कि धनात्मक है।

अब, मान लीजिए कंपनी A प्रयिकताओं p_1 और p_2 से अपनी युक्तियां A_1 और A_2 को खेलता है और मान लीजिए कंपनी B प्रायिकताओं q_1, q_2, q_3 से अपनी युक्तियाँ B_1, B_2 और B_3 को खेलता है जिससे कि उनकी निम्नलिखित इष्टतम सविकल्प युक्तियां S_A और S_B प्राप्त होती है।

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \text{ तथा } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

जिससे कि

$$p_1 + p_2 = 1; \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

और $\quad p_1, p_2 \geq 0; \qquad q_1, q_2, q_3 \geq 0$

अब हम समस्या को कंपनी B की दृष्टि से देखेंगे, कंपनी B, q_1, q_2, q_3 ज्ञात करना चाहता है जिससे कि उसकी अधिकतम प्रत्याशित हानि $v = \max(L_1, L_2)$ कम से कम हो सके, जहां

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 6q_1 + 2q_2 + 7q_3 \leq v \\ L_2 &= q_1 + q_2 + 3q_3 \leq v \\ &q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ &q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{aligned}\right] \qquad \ldots(24)$$

जहां v खेल का मान है।

क्योंकि v धनात्मक है, इसलिए हम (24) के संबंधों को v से भाग देते हैं

$$\frac{L_1}{v} = 6\frac{q_1}{v} + 2\frac{q_2}{v} + 7\frac{q_3}{v} \leq 1$$

$$\frac{L_2}{v} = \frac{q_1}{v} + 9\frac{q_2}{v} + 3\frac{q_3}{v} < 1$$

$$\frac{q_1}{v} + \frac{q_2}{v} + \frac{q_3}{v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{q_1}{v}, \frac{q_2}{v}, \frac{q_3}{v} \geq 0$$

अब हम नए चरों को परिभाषित करेंगे

$$Y_1 = \frac{q_1}{v},\ Y_2 = \frac{q_2}{v},\ Y_3 = \frac{q_3}{v} \text{ और } Y = \frac{1}{v}$$

B की समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या माना जा सकता है।

v का न्यूनतमीकरण $= \frac{1}{v}$ का अधिकतमीकरण

$= (Y_1 + Y_2 + Y_3)$ का अधिकतमीकरण

अर्थात् $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$

का अधिकतमीकरण, जबकि

$$6Y_1 + 2Y_2 + 7Y_3 \leq 1$$

$$Y_1 + 9Y_2 + 3Y_3 \leq 1$$

और $\quad Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

न्यूनतापूरक चरों (Stack Variables) को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$$

का अधिकतमीकरण, जबकि

$$6Y_1 + 2Y_2 + 7Y_3 + Y_4 = 1$$

$$Y_1 + 9Y_2 + 3Y_3 + Y_5 = 1$$

और $\quad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 > 0$

और इस समस्या को हम एकधा विधि से हल करेंगे :

प्रारंभिक एकधा सारणी (The Initial Simplex Table)

		C_j	1	1	1	0	0	अनुपात
C_B	Y_B	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_4	1	6	2	7	1	0	$\frac{1}{6} \rightarrow$
0	Y_5	1	1	9	3	0	1	1
$Y = 0$	$\Delta_j = Z_j - C_j$		$\underset{\uparrow}{-1}$	-1	-1	0	0	

द्वितीय एकधा सारणी (Second Simplex Table)

C_j	1	1	1	0	0	अनुपात		
C_B	Y_B	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_1	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
0	Y_5	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{26}{3}$	$\frac{11}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{5}{52} \rightarrow$
$Y = \frac{1}{6}$	Δ_j		0	$-\frac{2}{3}$ ↑	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	

तृतीय एकधा सारणी (Third Simplex Table)

C_j	1	1	1	0	0		
C_B	Y_B	b	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
1	Y_1	$\frac{7}{52}$	0	0	$\frac{57}{52}$	$\frac{9}{52}$	$-\frac{1}{26}$
1	Y_2	$\frac{5}{52}$	0	1	$\frac{11}{52}$	$-\frac{1}{52}$	$\frac{3}{26}$
$Y = \frac{3}{13}$	Δ_j		0	0	$\frac{4}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

क्योंकि $\Delta_j \geq 0$ इसलिए हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होते हैं:

$$Y_1 = \frac{7}{52},\ Y_2 = \frac{5}{52},\ Y_3 = 0 \text{ और } Y = \frac{3}{13}$$

लेकिन $Y_1 = \frac{q_1}{v},\ Y_2 = \frac{q_2}{v},\ Y_3 = \frac{q_3}{v}$ और $v = \frac{1}{Y} = \frac{13}{3}$

इसलिए

$$q_1 = Y_1 v = \frac{7}{52} \times \frac{13}{3} = \frac{7}{12}$$

$$q_2 = Y_2 v = \frac{5}{52} \times \frac{13}{3} = \frac{5}{12}$$

$$q_3 = Y_3 v = 0.\frac{13}{3} = 0$$

और खेल का मान $= V - C = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$

और समस्या के द्वैत हल में यह प्राप्त होता है:

$$X_1 = \frac{2}{13}, X_2 = \frac{1}{13}$$

$$p_1 = X_1 v = \frac{2}{13} \cdot \frac{13}{3} = \frac{2}{3}$$

$$p_2 = X_2 v = \frac{1}{13} \cdot \frac{13}{3} = \frac{1}{3}$$

इसलिए कंपनियों A और B की इष्टतम युक्तियां ये होती है:

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ और } S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $= \frac{1}{3}$

प्रश्न : 2 एकधा विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

16.6 सारांश (Summary)

इस इकाई में निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की गई है :

1) वर्ग भुगतान आव्यूह के हल के लिए बीजीय विधि।

2) आयताकार आव्यूह खेल समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में समानीत करने की विधि

3) आयताकार खेलों का मूलभूत प्रमेय.

4) एकधा विधि से खेल समस्या का हल।

16.8 उत्तर/संकेत/हल(Answers/Hints/Solutions)

E1) क) इष्टतम युक्तियां ये होती हैं

$$S_X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \frac{3}{17} & \frac{5}{17} & \frac{9}{17} \end{bmatrix} \text{ और } S_Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \frac{2}{17} & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \end{bmatrix}$$

और खेल का मान $V = \frac{11}{17}$.

ख) $S_P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ \frac{9}{24} & \frac{13}{24} & \frac{2}{24} \end{bmatrix}$; $S_Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \frac{21}{72} & \frac{40}{72} & \frac{11}{72} \end{bmatrix}$ और $V = \frac{91}{24}$

ग) $S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$; $S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ और $V = 5$

E2) $S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{3}{8} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$; $S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{9} & \frac{11}{72} \end{bmatrix}$ और $V = \frac{91}{24}$

समीक्षा (Review)

यह खंड इस पाठ्यक्रम का अंतिम खंड है। इस खंड में चार इकाइयाँ इकाई–13, इकाई–14, इकाई-15 और इकाई-16 हैं। इकाई-13 में, आव्यूह खेल, द्वि-व्यक्ति शून्य-योग खेल, अविकल्पी युक्ति, महाल्पिष्ठ और अल्पमहिष्ठ नियम, पल्याण बिन्दु और आयताकार खेल का मान जैसे शब्दों की परिभाषाएं दी गई है और उनकी व्याख्या की गई है। इकाई-14 में $m \times 2$ या $2 \times n$ की कोटि के भुगतान आव्यूहों वाले खेल की सविकल्प युक्तियों पर चर्चा की गई है। अंतिम दो इकाइयों में $m \times 2$ या $2 \times n$ की कोटि के खेलों से संबंधित समस्याओं के हल की कुछ विधियों पर चर्चा की गई है। जहां इकाई-14 में हमने ग्राफीय विधि पर चर्चा की है, वहीं इकाई-16 में, खंड 2 में बतायी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या के साथ इसका संबंध स्थापित करके हमने बीजीय विधि को लागू किया है।

खेल-सिद्धांत की संकल्पना को आप कितना समझ पाएं हैं इसकी जांच के लिए हमने कुछ प्रश्न दिए हैं जिन्हें आप हल कीजिए और इस खंड के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर की मिलान कीजिए।

P1) निम्नलिखित आयताकार खेलों को हल कीजिए।

क) $\begin{bmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

ख) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 & 6 \\ 5 & [illegible] & -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & [illegible] & [illegible] & 7 & [illegible] \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$

[illegible] खेलों को हल कीजिए जिनके भुगतान आव्यूह ये हैं :

क) $\begin{bmatrix} -2 & 15 & -2 \\ -5 & -6 & -4 \\ -5 & 20 & -8 \end{bmatrix}$

ख) $$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ग) $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

P3) क) λ के किस मान पर निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाला खेल ज्ञात किया जा सकता है :

खिलाड़ी Y

खिलाड़ी X $$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda & 6 & 2 \\ -1 & \lambda & 7 \\ -2 & 4 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

ख) p और q का मान-परिसर (Range of Values) ज्ञात कीजिए जिससे प्रविष्टि (2, 2) खेल का पल्याण बिन्दु हो जाता हो

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A $$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & q \\ 4 & p & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

P4) निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाले खेल को हल कीजिए।

खिलाड़ी Y

खिलाड़ी X $$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

P5) दो कंपनियां X और Y के बीच समान उत्पाद के लिए स्पर्धा हो रही है. भुगतान आव्यूह वाले खेल की उनकी अलग अलग युक्तियां निम्नलिखित हैं।

कंपनी Y

खिलाड़ी X $$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ग्राफीय विधि से मालूम कीजिए कि दोनों कंपनी की सर्वोत्तम युक्तियां क्या हैं और साथ ही खेल का मान भी ज्ञात कीजिए।

P6) एक ही उत्पाद के लिए स्पर्धा कर रही दो कंपनियों की युक्तियां निम्नलिखित भुगतान आव्यूह में दी गई हैं।

$$\begin{array}{cc} & \text{कंपनी } A \\ & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \text{कंपनी } B \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ग्राफीय विधि से दोनों कंपनियों की सर्वोत्तम युक्तियां और खेल का मान ज्ञात कीजिए।

P7) ग्राफीय विधि से इस खेल को हल कीजिए।

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{कंपनी } A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

P8) प्रमुखता गुणधर्म से निम्नलिखित खेलों को हल कीजिए।

क)

$$\begin{array}{cc} & \text{खिलाड़ी } Y \\ & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \text{खिलाड़ी } X \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

ख)

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

P9) **प्रमुखता गुणधर्म से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए।**

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{खिलाड़ी B} \\
 & \begin{array}{cccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} \end{array} \\
\text{खिलाड़ी A} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\
4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\
-4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\
4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

P10) क) निम्नलिखित भुगतान आव्यूह के संबंध में, शून्य-योग खेल को एक तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या में रूपांतरित कीजिए और एकधा विधि से इसे हल कीजिए।

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{खिलाड़ी B} \\
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\text{खिलाड़ी A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 3 \\
3 & 5 & -3 \\
6 & 2 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ख) एकधा विधि से निम्नलिखित खेल को हल कीजिए।

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{खिलाड़ी Y} \\
 & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\
\text{खिलाड़ी X} \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 1 \\
3 & -3 & 3 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

समीक्षा/उत्तर/हल (Review/Hints/Solutions)

P1) क) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (2, 2)$ और $v = 5$

ख) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (2, 3)$ और $v = 1$

ग) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (3, 2)$ और $v = 2$

P2) क) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (1, 1)$ या $(1, 3)$ और $v = -2$

ख) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (2, 3)$; $v = 4$

ग) इष्टतम युक्तियां $S_0 = (3, 3)$; $v = 2$

P3) क) **पहली पंक्ति और पहले स्तंभ से हम पाते हैं कि यदि λ, खेल का मान हो, तो उसे -1 और 2 के बीच स्थित होना चाहिए या अधिक से अधिक इनके बराबर होना** चाहिए, जबकि यदि दूसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ में λ , पल्याण बिन्दु पर हो, तो यह ऐसा होना चाहिए कि $6 \le \lambda \le -1$ और यदि तीसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ का λ, पल्याण बिन्दु पर हो, तो λ ऐसा होना चाहिए कि $7 \le \lambda \le -2$ और, क्योंकि अंतिम दो साध्यों में संगति नहीं है, इसलिए λ का केवल एक मान, जो कि संगति है, $-1 \le \lambda \le 2$ है। जिस मान पर खेल का एक पल्याण बिन्दु होता है।

या

λ के मान की उपेक्षा करके हम खेल के महाल्पिष्ठ और अल्पमहिष्ठ मान ज्ञात करते हैं अर्थात् $\underline{v} = 2$ और $\overline{v} = -1$. अत: खेल का मान -1 और 2 के बीच होगा। अत: एक पल्याण बिन्दु के लिए $-1 \le \lambda \le 2$.

ख) क्योंकि (2, 2) पल्याण बिन्दु है, इसलिए खेल का मान 7 होगा। अब, खिलाड़ी A का महाल्पिष्ठ मान 7 हो, इसके लिए यह आवश्यक है कि $q \ge 7$. इसी प्रकार खिलाड़ी B का अल्पमहिष्ठ मान 7 हो, इसके लिए यह आवश्यक है कि $p \le 7$. अत: p और q के मान-परिसर (Range of Values) $p \le 7$, $q \ge 7$ होंगे।

P4) खिलाड़ी X और खिलाड़ी Y की युक्तियाँ $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ और $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ हैं और $V = \frac{8}{3}$

P5) सर्वोत्तम युक्तियां : $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 0 \end{bmatrix}$

खेल का मान $V = \frac{1}{3}$

P6) सर्वोत्तम युक्तियां $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

खेल का मान $V = \frac{8}{7}$

P7) सर्वोत्तम युक्तियां : $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ और $V = \frac{49}{11}$

P8) क) (X_4, Y_2): $v = 0$

ख) $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$: $V = \frac{7}{8}$.

P9) खिलाड़ी A खिलाड़ी B

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

और $V = \frac{13}{7}$.

P10) क) $S_A = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \; S_B = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$ और $V = 1$

ख) $S_X = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{array}; \; S_Y = \begin{array}{c} \begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{18} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \end{array}$ और $V = \frac{2}{3}$.

16.7 शब्दावली (Glossary)

आयताकार आव्यूह खेल	Rectangular Matrix Game
इष्टतम युक्ति	Optimum Strategy
न्यूनतापूरक चर	Slack Variable
प्रमुखता नियम	Dominance Principle
वर्ग भुगतान आव्यूह	Square Pay-off Matrix

टिप्पणियाँ

टिप्पणियाँ

टिप्पणियाँ