

(7 pages)

OCTOBER 2011

U/ID 4721/PAT

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. If A and B are subgroups of an abelian group G , then prove that AB is a subgroup of G .

A, B இவை G என்ற அபிலியன் குலத்தின் உட்குலங்கள் எனில் AB, G ன் உட்குலம் என நிறுவுக.

2. Prove that the order of any element of a finite group G divides the order of G .

G என்ற முடிவுற்ற குலத்திலுள்ள எந்த ஒரு உறுப்பின் வரிசையும் G ன் வரிசையை வகுக்கும் என நிரூபி.

3. Define a Boolean ring.

ஒரு பூலியன் வளையத்தை வரையறு.

4. Define the ring of Gaussian integers.

காஸியன் முழு எண்களின் வளையத்தை வரையறு.

5. Define polynomial rings.

பல்லுறுப்பு வளையங்களை வரையறு.

6. When a polynomial is said to be primitive?

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை எப்பொழுது தொடக்கநிலை எனப்படும்?

7. In $V_3(R)$ prove that the vectors $(1, 4, -2)$, $(-2, 1, 3)$ and $(-4, 11, 5)$ are linearly dependent.

$V_3(R)$ ல் $(1, 4, -2)$, $(-2, 1, 3)$, $(-4, 11, 5)$ என்ற வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புள்ளவை என நிரூபி.

8. Define a minimal generating set.

சிறும ஆக்கும் கணத்தை வரையறு.

9. State Cayley Hamilton theorem.

கெய்லி ஹாமில்டன் தேற்றத்தை வரையறு.

10. Define an inner product space.

உட்பெருக்கல் வெளியை வரையறு.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

All questions carry equal marks.

11. (a) (i) Show that if H and N are subgroup of a group G and N is normal in G , then prove that $H \cap N$ is normal in H .
- (ii) Prove that any homomorphic image of a cyclic group is cyclic.
- (i) H, N என்பவை G என்ற குலத்தின் உட்குலங்கள் N நேர்மை உட்குலம் எனில் $H \cap N - H$ ல் நேர்மை என நிரூபி.
- (ii) ஒரு வட்டக்குலத்தின் எந்த ஒரு செயல் மாறாக் கோர்த்தலின் பிம்பமும் வட்டக்குலம் என நிறுவுக.

Or

- (b) (i) Prove that any finite cyclic group of order n is isomorphic to (Z_n, \oplus) .
- (ii) Prove that A group G has no proper subgroups iff it is a cyclic group of prime order.

- (i) வரிசை n உள்ள எந்த ஒரு முடிவான வட்ட குலமும் (Z_n, \oplus) உடன் சம ஒப்புமைக் கோர்த்தல் உடையதாகும்.
- (ii) G என்ற ஒரு குலத்திற்கு தகுந்த உட்குலங்கள் இருப்பதற்குத் தேவையான போதுமான கட்டுப்பாடு G -பகா எண் வரிசை கொண்ட ஒரு வட்டத் குலமாக இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

12. (a) R is a commutative ring with identity. Prove that an ideal M of R is maximal iff R/M is a field.

R என்பது முற்றொருமை உள்ள ஒரு பரிமாற்று வளையம் எனில் R ன் சீர்மம் M மீப்பெருமமாக இருக்கத் தேவையான போதுமாக கட்டுப்பாடு R/M ஒரு கனமாக இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

Or

- (b) State and prove the fundamental theorem of homomorphism of rings.

வளையங்களின் செயல்மாறாக் கோர்த்தலுக்கான அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

13. (a) (i) R is an Euclidean domain. If a and b are two non-zero elements of R then prove that
- (1) b is not a unit in $R \Rightarrow d(a) < d(ab)$
- (2) b is a unit in $R \Rightarrow d(a) = d(ab)$.
- (ii) Prove that 5 is not a prime element in the ring R of Gaussian integers.
- (i) R ஒரு யூக்லீடியன் அரங்கம் a, b, R ன் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் எனில்
- (1) b, R ன் ஒரு அலகு இல்லை எனில் $\Rightarrow d(a) < d(ab)$ எனவும்.
- (2) b, R ன் ஒரு அலகு $\Rightarrow d(a) = d(ab)$ எனவும் நிறுவுக.
- (ii) 5 R என்ற காலியன் முழு எண்களின் வளையத்தில் பகா உறுப்பு அல்ல என நிறுவுக.

Or

- (b) State and prove division algorithm.

வகுத்தல் படி முறையினை எழுதி நிறுவுக.

14. (a) If V is a finite-dimensional vector space over a field F . A and B are subspaces of V . Then prove that

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

V, F ஐப் பொறுத்த ஒரு முடிவுற்ற பரிமாணமுள்ள வெக்டர் வெளி A, B V -ன் உள் வெளிகள் எனில்

$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ என நிரூபி.

Or

- (b) If $S, T \in A(V)$ then prove that

- (i) $\text{rank}(ST) \leq \min(\text{rank}(S), \text{rank}(T))$ and
(ii) $\text{rank}(ST) = \text{rank}(TS) = \text{rank}(T)$ if S is regular.

$S, T \in A(V)$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

- (i) $\text{rank}(ST) \leq \min(\text{rank}(S), \text{rank}(T))$
(ii) S ஒழுங்கானது எனில் $\text{rank}(ST) = \text{rank}(TS) = \text{rank}(T)$.

15. (a) (i) State and prove triangle inequality.
(ii) If V is a finite dimensional inner product space and W a subspace of V , prove that $(W^\perp)^\perp = W$.

- (i) முக்கோண சமனின்மை விதியை எழுதி நிறுவுக.
- (ii) V ஒரு முடிவான பரிமாணமுள்ள உட்பெருக்கல் வெளி W V ன் உள்வெளி எனில் $(W^\perp)^\perp = W$ என நிறுவுக.

Or

- (b) (i) State and prove Cayley-Hamilton theorem.
- (ii) Prove that the characteristic roots of A and A^T are the same.
- (i) கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.
- (ii) A , A^T இவற்றின் சிறப்பியல்பு தீர்வுகள் சமம் என நிரூபி.